Комнатный Д.В., к. т. н.
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

ЕСТЬ ЛИ ПЕРСПЕКТИВЫ У ЗАДАЧИ О КВАДРАТУРЕ КРУГА?

(дополнительные материалы к занятиям по геометрии)

Поиски решения классической задачи о квадратуре круга с помощью только циркуля и линейки продолжаются некоторыми авторами до настоящего времени. В [1] такие авторы описываются как мужи, которым неведомо слово «невозможно», которые обладают недостаточными знаниями в математике и убеждены, что эта задача крайне важна, и к тому же лишенные логики отшельники и крайне плодовитые писатели.

Такая суровая оценка во многом справедлива. Но, если увлеченный геометрией задумается о том, закрыта ли бесповоротно проблема квадратуры круга, то это не значит, что этот человек сразу попадает под приведенное описание. Ключевым пунктом в дальнейших размышлениях должны стать глубокие и полные знания о состоянии проблемы, не ограниченные известным доказательством Линдемана.

Для облегчения ориентирования в накопленных с античности результатах, автор попытался обобщить доступные ему сведения и высказать некоторые соображения о наличии каких бы то ни было перспектив в занятиях квадратурой круга. По мнению автора, такой подход более интересен и полезен, особенно для учащихся средних учебных заведений, студентов вузов, преподавателей математики. Он представляет интерес и для широкого круга любителей математики.

Невозможность решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки доказана, с идеей доказательства можно ознакомиться в [1]. Само же доказательство приведено в [2], оно достаточно сложное.

Тем не менее, геометрия далеко ушла от догмы Платона, которая требует осуществления только точных построений циркулем и линейкой.

Следовательно, допустима, во-первых, разработка приближенных решений задачи о квадратуре круга. Однако, новое решение должно, как минимум, обеспечивать не меньшую, а желательно и большую точность, чем уже разработанные. Наибольшая точность, 8 знаков после запятой, получена великим индийским математиком С. Рамануджаном. Так как это решение малодоступно, то приведем его по [3] (рисунок 1).

На рисунке 1 AB – диаметр круга, который желательно квадрировать. $OB=OA=r$ радиус круга. Тогда $CB=\sqrt{2}r$, так как треугольник AOB – прямоугольный равнобедренный. Строим отрезок AT, длина отрезка $AT=\frac{1}{3}r$. На хорде CB строим отрезки CM и MN, длины этих отрезков $CM=MN=AT=\frac{1}{3}r$. Тогда отрезок $NB=\sqrt{2}r-\frac{2}{3}r=r\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)$.

Длина отрезка AN находится по теореме косинусов $AN^2=BA^2+BN^2-2\cdot BA\cdot BN\cdot\cos NBA$.

Угол $\angle NBA=45°$, поэтому $AN^2=(2r)^2+r^2\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot 2r\cdot r\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)\cos 45^\circ=\frac{22}{9}r^2$.

Тогда $AN=r\sqrt{\frac{22}{9}}$.

Аналогично находится длина отрезка AM, с учетом равенства углов $\angle MBA$ и $\angle NBA$.

$$AM^2 = (2r)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 r^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) r \cos 45^\circ = \frac{19}{9} r^2 .$$

Тогда $AM = \sqrt{\frac{19}{9}} r$.

На отрезке *AN* строится отрезок *AP*, так чтобы его длина равнялась длине отрезка *AM*. Отрезок *QP* строится параллельно отрезку *MN* . Из *O* проведем отрезок до пересечения с отрезком *AM* в точке *Q*. Тогда треугольники *MAN* и *QAP* подобны.

$\frac{AQ}{AM} = \frac{AP}{AN} = \frac{AM}{AN}$. Тогда $AQ = \frac{AM^2}{AN} = \frac{19}{3\sqrt{22}} r$.

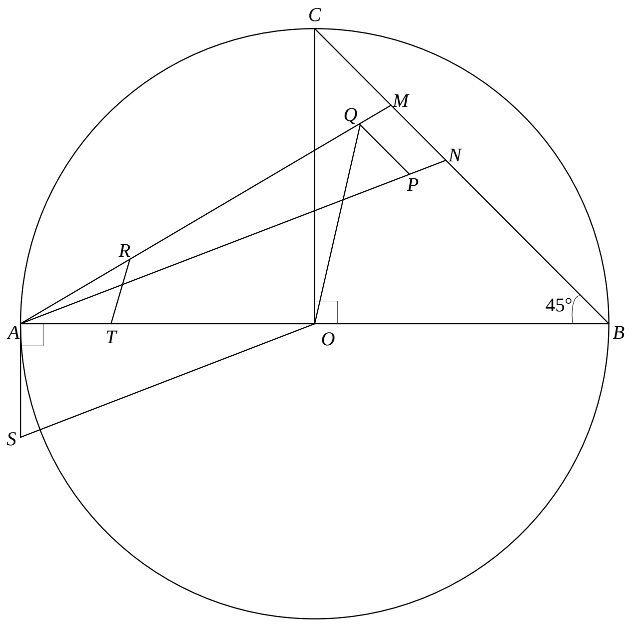

Рисунок 1 – Построение Рамануджана

Строится отрезок *TR* параллельно *OQ*. Тогда треугольник *RAT* подобен треугольнику *QAO*. Следовательно $AR = AQ \frac{AT}{AO} = \frac{19}{9\sqrt{22}} r$.

В точке *A* к окружности строится касательная. На касательной отложим отрезок *AS*, длина которого равна отрезку *AR*.

Тогда $SO = \sqrt{r^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2 r^2} = r\sqrt{1 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2}$.

$$3\sqrt{SO} = 3\sqrt{r}\sqrt[4]{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2} = \sqrt{r}\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}} .$$

$\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}} \approx 3{,}1415926525$ 8 2. При этом значение числа π с тем же числом значащих цифр π≈3,141592653897. Тогда $3\sqrt{SO} \approx \pi\sqrt{r}$ с высокой степенью точности.

С помощью отрезка *SO* строится сторона квадрата, площадь которого приближенно равна площади данного круга (рисунок 2).

Строится дуга b_1 радиуса SO до пересечения с продолжением диаметра AB в точке S_1. На отрезке $B\,S_1$, как на диаметре, строится окружность b_2. Из O строится перпендикуляр OE к этой окружности. $OE = \sqrt{OB \cdot OS_1} = \sqrt{r \cdot r\sqrt{1+\left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2}} = r\sqrt[4]{1+\left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2}$.

От точки O строятся отрезки $OF=FA_1=OE$. Тогда $EA_1 = 3r\sqrt[4]{1+\left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2} \approx \pi r$.

На отрезке EA_1, как на диаметре строится окружность. От точки A откладывается отрезок $A_1H=OB=r$. Из H строится перпендикуляр к EA_1, обозначенный B_1H. Тогда из прямоугольного треугольника EB_1A_1 $A_1B_1 \approx \sqrt{\pi r \cdot r} \approx r\sqrt{\pi}$. Таким образом, получена сторона квадрата, площадь которого равна площади данного круга.

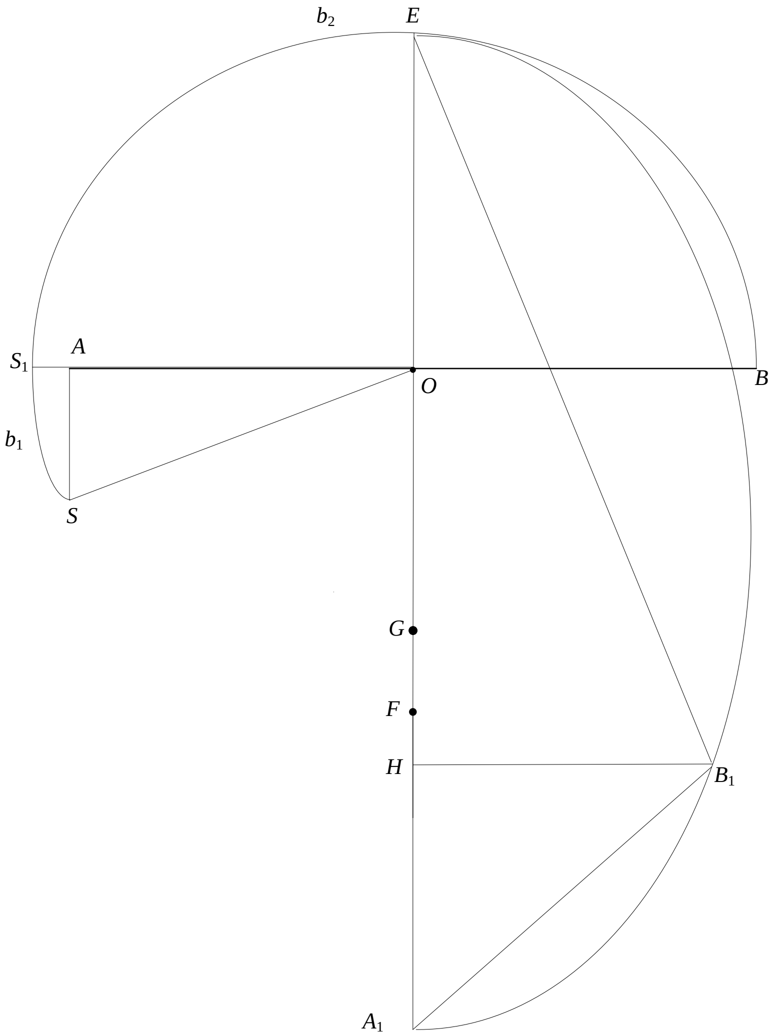

Рисунок 2 – Построение стороны квадрата, площадь которого равна площади данного круга

Известны способы решения задачи о квадратуре круга с помощью специальных линий – квадратисс [3]. Так как эти линии нужно строить практически и с высокой точностью, то, во-вторых, можно разрабатывать механизмы для построения квадратисс. В качестве примера рассмотрим механизм для построения квадратиссы Динострата [4] (рисунок 3).

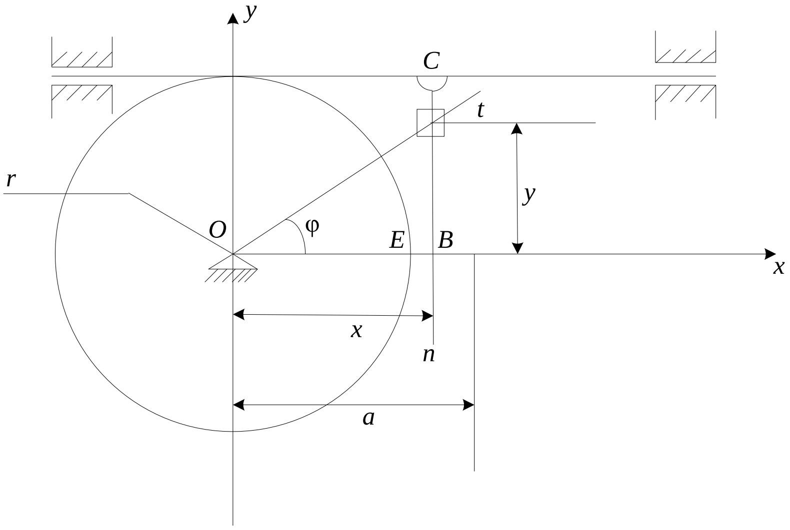

Рисунок 3 – Механизм для построения квадратиссы Динострата

В этом механизме колесо радиуса *r* движет рейку, к которой присоединена направляющая *Cn.* С радиусом колеса соединена направляющая *Ot.* По обеим направляющим скользит ползун. В начальном положении направляющие находятся в точке *B* с координатой $x_B = \frac{\pi}{2} r = a$.

Тогда для произвольного положения направляющих $x = OB - EB \approx a - r\varphi = a - \frac{2a}{\pi}\varphi$

$y = x \operatorname{tg} \varphi$. Отрезок *EB* определяется движением направляющей *Cn,* которое зависит от поворота колеса.

Исключив угол поворота, имеем $y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}$, то есть уравнение квадратиссы Динострата.

Однако при изготовлении механизма с необходимостью возникает проблема обеспечения точности изготовления и функционирования. Этот вопрос весьма далек от проблемного поля данной публикации. Поэтому заинтересованному читателю рекомендуется книга [5] и указанная в ней литература.

Некоторые любители математики рассматривают вопрос о связи числа π и золотого сечения Ф (фидиево число). К сожалению, ими не учитывается уже полученное построение Э. В. Хобсона [6]. Приведем это построение (рисунок 4)

Пусть *OA*= *r* радиус круга, для которого строится квадрат равной площади. Из точки *O* строится отрезок $OD = \frac{3}{5} r$ и отрезок $OE = \frac{1}{2} r$. На *DE* , как на диаметр строится круг. Также строится отрезок $OF = \frac{3}{2} r$. На отрезке *AF* , как на диаметре строится круг. Из точки *O* строится перпендикуляр к *OA,* пересекающий первый круг в точке *G*, а второй – в точке *H.*

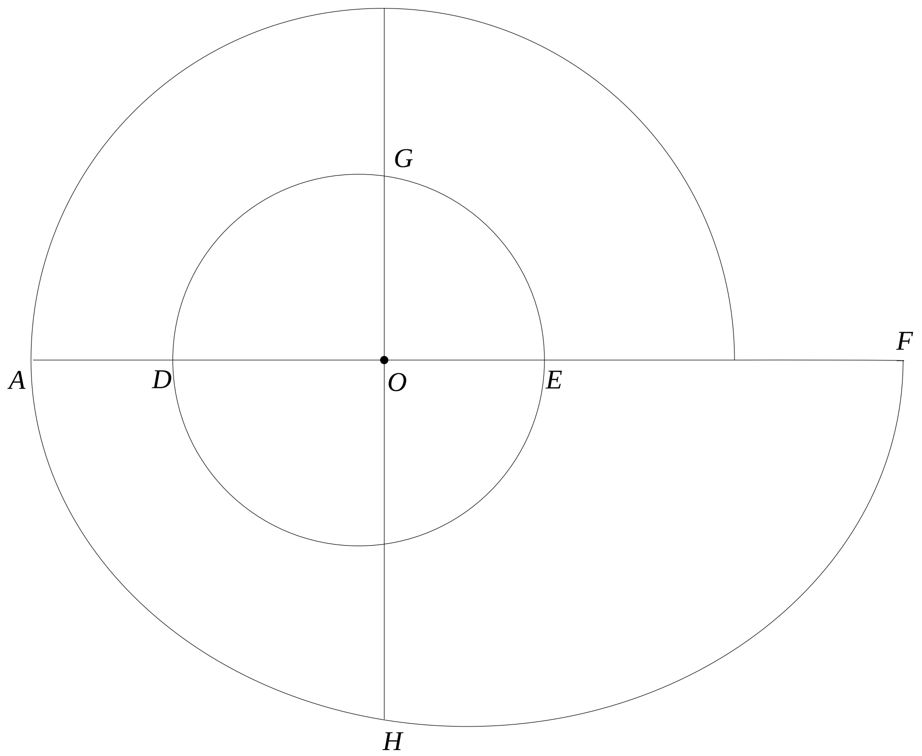

Рисунок 4 – Решение задачи о квадратуре круга с помощью золотого сечения

Тогда $OG = \sqrt{\frac{3}{5}r \cdot \frac{1}{2}r} = r\sqrt{\frac{3}{10}}$, $OH = \sqrt{r \cdot \frac{3}{2}r} = r\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$$GH = OG + OH = r\left(\sqrt{\frac{3}{10}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = r\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = r\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt{\frac{6}{5}} \approx r\sqrt{\pi}.$$

Таким образом, *GH* – сторона квадрата, той же площади, что и заданный круг. При этом $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$ – фидиево число.

Все вновь предлагаемые решения задачи о квадратуре круга с помощью золотого сечения должны иметь не меньшую, а желательно большую точность, чем приведенное.

Итак, описанные в статье результаты позволяют заключить, что в задаче о квадратуре круга остается еще поле полезной деятельности. Тем не менее, существуют принципиальные требования к вновь предлагаемым результатам, без удовлетворения которым эти результаты не приемлемы. Так вновь предлагаемые приближенные построения должны иметь не меньшую, а лучше большую точность, чем опубликованные. Вновь предлагаемые построения должны быть не сложнее, а желательно проще, чем уже предложенные построения той же точности. Механизмы для решения задачи о квадратуре круга должны быть не сложнее уже предложенных, обеспечивать достаточную точность построения и не создавать чрезвычайных трудностей изготовителю. Выполнить эти требования достаточно сложно. Сама проблема находится на периферии современной математики, хотя может в описанных аспектах удовлетворить желание творчества энтузиастов.

Автор считает возможным завершить свою работу словами Ламберта [7]: «Я имею основание сомневаться, что настоящая статья будет прочтена … теми, которые затрачивают столько времени и труда для отыскания квадратуры круга». Но, дополняя эту мысль, автор надеется, что для настоящих друзей математики его работа принесет пользу, указав, что следует и чего не следует предпринимать в их увлечениях.

Список литературы

1. Наварро, Х. Секреты числа π / Х. Наварро. – М. : Де Агостини, 2014. – 144 с.
2. Клейн, Ф. Элементарная математика сточки зрения высшей / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1987. – Т. 1. – 431 с.
3. Бен Ари, М. Математические сюрпризы / М. Бен Ари. – М. : ДМК Пресс, 2023. – 216 с.
4. Артоболевский, И. И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых / И. И. Артоболевский. – М. Изд-во АН СССР, 1959. – 254 с.
5. Красковский, Е. А. Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем / Е.Я. Красковский, Ю. А. Дружинин, Е. М. Филатова. – М. : Высш.школа, 1991. – 480 с.
6. Hobson, E. W. Squaring the Circle: A history of the Problem / E. W. Hobson. – Cambridge, Cambridge University Press, 1913, 257 p.
7. Прасолов, В. В. Три классические задачи на построение / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1982. – 80 с.