Исследовательские задания к областному турниру юных математиков

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

<u>Предполагаемый пакет задач</u>

1. Последовательности первых цифр (Симоненко Д.Н.)

I. Для степеней двойки 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, … рассмотрим последовательность

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \dots . \qquad (1)$$

Также будем рассматривать последовательность, образованную первыми цифрами степеней числа 5:

$$1, 5, 2, 1, 6, 3, \dots . \qquad (2)$$

Исследуя эти последовательности, ответьте на следующие вопросы:

1) Докажите, что каждый член последовательности (1) встречается в последовательности (2) и наоборот, каждый член последовательности (2) встречается в последовательности (1).

2) Докажите, что любые два подряд идущие члены последовательности (1) не могут являться двумя подряд идущими членами последовательности (2). Верно ли обратное, что любые два подряд идущие члены последовательности (2) не могут являться двумя подряд идущими членами последовательности (1)?

3) Очевидно, что первые два члена 1 и 2 последовательности (1), взятые в обратном порядке, то есть 2, 1, встречаются в последовательности (2). Докажите, что в последовательности (2) найдутся подряд идущие три числа 4, 2 и 1 – первые три члена последовательности (1), записанные в обратном порядке. А первые 10 членов последовательности (1), записанные в обратном порядке, то есть 5, 2, 1, 6, 3, 1, 8, 4, 2, 1?

4) Исследуйте, для каких n первые n членов последовательности (1), записанные в обратном порядке, являются подряд идущими членами последовательности (2). А если поменять последовательности местами?

II. Рассмотрим аналогичные последовательности для 4:

$$1, 4, 1, 6, 2, \dots \qquad (3)$$

для 25:

$$1, 2, 6, \dots \qquad (4)$$

для 3:

$$1, 3, 9, 2, 8, 2, \dots \qquad (5)$$

1) Ответьте на вопросы пункта I, если последовательности (1) заменить на (3), а (2) на (4).
2) Ответьте на вопросы пункта I для последовательностей (1) и (4), для последовательностей (2) и (3).
3) Ответьте на вопросы пункта I для последовательностей (1) и (5), для последовательностей (2) и (5).
III. Предложите свои идеи развития данной задачи и исследуйте их.

2. Ноль равно один! (Мурашко В.И.)

Напомним, что через $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ мы обозначаем множества рациональных и целых чисел соответственно. Два рациональных числа a и b будем называть «эквивалентными» и обозначать $a \approx b$, если $a - b \in \mathbb{Z}$.

1. Докажите, что для любых $a, b, c \in \mathbb{Q}$ верно:
(a) $a \approx a$.
(b) Если $a \approx b$, то $b \approx a$.
(c) Если $a \approx b$ и $b \approx c$, то $a \approx c$.
(d) $a \approx b$ тогда и только тогда, когда $a + c \approx b + c$.
(e) Если $c \in \mathbb{Z}$ и $a \approx b$, то $c \cdot a \approx c \cdot b$.
(f) Найдётся ли такое нецелое c, что, каковы бы не были рациональные a и b, из $a \approx b$ всегда следует $c \cdot a \approx c \cdot b$.

2. Пусть $a \in \mathbb{Q}$. Через z_a обозначим множество рациональных чисел, «эквивалентных» a.
(a) Докажите, что

$$z_a \cap z_b = \begin{cases} z_a, & a \approx b \\ \varnothing, & a \not\approx b \end{cases}$$

(b) Определим $z_a + z_b$ как множество сумм вида $x + y$, где $x \in z_a, y \in z_b$. Докажите, что $z_a + z_b = z_{a+b}$.
(c) Какими свойствами обладает указанное сложение? В частности, будет ли оно коммутативным и ассоциативным?
(d) Пусть $c \in \mathbb{Z}$. Определим $c \cdot z_a$ как множество произведений вида $c \cdot x$, где $x \in z_a$. Докажите, что $c \cdot z_a = z_{c \cdot a}$.
(e) Какими свойствами обладает указанное умножение? В частности, верно ли что $(c \cdot b) \cdot z_a = c \cdot (b \cdot z_a) = (b \cdot c) \cdot z_a$ и $c \cdot (z_a + z_b) = c \cdot z_a + c \cdot z_b$?

3. Обозначим через $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ множество классов «эквивалентности», введенных в предыдущем пункте (т.е. множество всех различны z_a). Как мы уже видели, элементы этого множества можно складывать и умножать на целое число.
(a) Конечное ли число элементов множества $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$?
(b) Сколько различных элементов $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ можно получить из $z_{\frac{1}{3}}$ и $z_{\frac{1}{2}}$ с помощью операции сложения? В частности, конечно ли их число?
(c) Ответьте на предыдущий вопрос, если для произвольных неравных элементов z_a и z_b из $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(d) Опишите все элементы $z_{a_1}, z_{a_2}, \dots, z_{a_n}$ множества $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ такие, что с помощью операции сложения из этих элементов можно получить только конечное число N элементов множества $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(e) Вычислите или оцените, или предложите алгоритм вычисления числа N из предыдущего пункта.
(f) Изменятся ли ответы на вопросы (a)–(e), если помимо сложения, элементы также можно умножать на любые целые числа?
4. Напомним, что для решения уравнения надо найти все его корни и доказать, что других корней нет. В этом пункте x и y — переменные из множества $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(a) Решите уравнение $c \cdot x + z_b = z_0, c \neq 0$, в зависимости от данных $c \in \mathbb{Z}$ и $z_b \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(b) Решите систему уравнений, в зависимости от данных $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in \mathbb{Z}$ и $z_{b_1}, z_{b_2} \in \mathbb{Q}/\mathbb{R}$

$$\begin{cases} c_{11} \cdot x + c_{12} \cdot y + z_{b_1} = z_0, \\ c_{21} \cdot x + c_{22} \cdot y + z_{b_2} = z_0. \end{cases}$$

3. Жуткие эксперименты над кубиками (Мурашко В.И.)
Пространством элементарных исходов Ω — множество, содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, проведенного один раз (результат эксперимента однозначен). Элементы этого множества называют *элементарными исходами*.
В данной задаче мы рассматриваем эксперименты с конечным числом исходов. *Событием* будем называть любое подмножество Ω. Будем говорить, что в ходе эксперимента произошло событие A, если эксперимент закончился элементарным исходом, лежащим в A. Множество всех событий обозначается $\mathcal{P}(\Omega)$. *Случайной величиной* называется любая функция, определенная на $\mathcal{P}(\Omega)$, и принимающая действительные значения.
Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Каждому ω_i ставится его вероятность $p_i = P(\omega_i)$ так, чтобы
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ и $0 \leq p_i \leq 1$ для любого i.
Вероятностью $P(A)$ *события* A называется сумма вероятностей элементарных исходов в него входящих.
Математическим ожиданием $\mathrm{M}\xi$ случайной величины ξ называется сумма произведений: значение случайной величины на вероятность того, что случайная величина примет это значение. То есть, если ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{i=1}^{k} P(\xi = x_i) \cdot x_i$$

Также n одинаковых экспериментов называются *независимыми*, если вероятность того, что первый окончится исходом a_1, второй – исходом a_2, и т.д., n-й – исходом a_n, равняется $P(a_1)P(a_2)\ldots P(a_n)$.
I. В данной задаче под кубиком будем понимать куб, грани которого пронумерованы числами от 1 до 6. Эксперимент – бросок кубика. Результат эксперимента (элементарный исход) – число, записанное на верхней грани кубика после броска. Всего у нас 6 элементарных исходов и мы считаем их равновероятными. Т.е., например, вероятность выпадения 1 равна $\frac{1}{6}$. Рассмотрим, например, событие – выпадение четного числа. Ему соответствуют элементарные исходы 2, 4 и 6. Значит его вероятность: $\frac{1+1+1}{6} = \frac{1}{2}$.
Примером случайной величины служит величина, равная 1, если на кубики выпало четное число, и равная 0 в противном случае. Её математическое ожидание: $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.

Пусть после независимых n бросков кубиков выпали числа $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. При этом НЕОБЯЗАТЕЛЬНО x_i выпало на i -м кубике. Вычислите математические ожидания величин, равных:

I.1. x_1, при: (a) $n=1$, (b) $n=2$ и (c) при произвольном n.

I.2. $x_1+x_2+\ldots+x_n$, при: (a) $n=2$, (b) $n=3$ и (c) при произвольном n.

I.3. x_1+x_2, при: (a) $n=2$, (b) $n=3$ и (c) при произвольном n.

I.4. x_2+x_4, при: (a) $n=4$ и (b) при произвольном n.

I.5. $x_2+x_4+\ldots+x_{2\left[\frac{n}{2}\right]}$, где $[x]$ — целая часть числа x.

I.6*. $x_1+\ldots+x_m$, при произвольных $m \le n$.

II. Пусть теперь в результате эксперимента мы равновероятно получаем одно из k натуральных чисел от 1 до k. Исследуйте вопросы, аналогичные I.1-I.6 в этом случае.

III. Пусть у нас имеется «шулерский кубик» — числа 1-5 на нём выпадают с вероятностью $\frac{1}{7}$, а число 6 – с вероятностью $\frac{2}{7}$. Исследуйте вопросы, аналогичные I.1-I.6 в этом случае.

4. Заряды (Короткевич Г.)

Перед вами — N металлических электрически заряженных шариков, лежащих по отдельности. Заряды разных шариков могут быть различны, но известно, что сумма зарядов всех N шариков равна нулю. Есть также некоторое множество допустимых чисел S. Разрешается сколько угодно раз делать следующую операцию: выбрать число k из S, взять любые k шариков и "сжать в кулаке": соединить эти шарики так, чтобы их заряды уравнялись (соответственно, если заряды этих k шариков были a_1, a_2, ..., a_k, то после операции все шарики будут иметь заряд, равный среднему арифметическому $a_1, a_2, \ldots, a_k$). После операции шарики разъединяются и раскладываются по исходным позициям, не касаясь других шариков.

1) Покажите, что вне зависимости от исходных зарядов шариков всегда можно сделать все заряды нулевыми, при условии:

1.1) $N = 4, S = \{2\}$;

1.2) $N = 2^m$ (m — целое), $S = \{2\}$;

1.3) N — натуральное, $S = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ (множество простых чисел).

2) Определите, каким необходимым или достаточным условиям должны удовлетворять исходные заряды шариков, чтобы с помощью данных операций можно было сделать все заряды нулевыми, если:

2.1) $N = 3, S = \{2\}$;

2.2) $N \ge 4, S = \{N - 1\}$;

2.3) $N = 5, S = \{2\}$;

2.4) N — чётное, $S = \left\{\frac{N}{2}\right\}$.

3) Предложите свои обобщения и частные случаи задачи.

5. Построения на параллельных прямых (Струк А.Н.)

В данной задаче рассматриваются варианты расположения точек на параллельных прямых.

1. Постройте равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) с углом BAC, равным α, три вершины которого лежат на параллельных прямых.

2. Постройте равносторонний треугольник ABC с вершинами на трех данных параллельных прямых a, b, c.

3. Постройте треугольник с углами 30°, 60° и 90°, вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.
4. Постройте квадрат $ABCD$, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых a, b, c.
5. F – точка плоскости, где расположены три параллельные прямые a, b, c. Проведите через F прямую так, чтобы разность длин высекаемых отрезков между соседними параллельными прямыми была равна данному отрезку n.
6. Вершины равностороннего треугольника со стороной q расположены на трех параллельных прямых. Расстояние между крайними прямыми равно m. Докажите, что $m \leq q \leq \frac{2}{\sqrt{3}}m$.
7. Предложите свои обобщения и направления исследования данной задачи.

6. Нечто целое (Горский С.М., Мурашко В.И.)

Введем обозначение. Для натурального числа через $n!$ обозначим произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Для удобства будем считать, что $0! = 1$. Во всех пунктах будем рассматривать только целые неотрицательные числа.
1. Докажите, что для всех n и k $(k \leq n)$ дробь $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ всегда есть целое число.
2. Докажите, что для всех $k_1, \ldots, k_m$ таких что $k_1 + \cdots + k_m = n$ дробь $\frac{n!}{k_1! \ldots k_m!}$ всегда есть целое число.
3. Докажите, что если $n \geq m$ число $(n, m) \cdot \frac{(n-1)!}{m!(n-m)!}$ есть целое число, где (n, m) — наибольший общий делитель чисел n и m.
4. Докажите, что для всех n дробь $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ всегда целое число.
5. Докажите, что для всех n и k $(k \leq n)$ дробь $\frac{(n-1)!n!}{k!(n-k)!(k-1)!(n-k+1)!}$ всегда целое число.
6. Докажите, что для всех n и m $(m \leq n)$ дробь $\frac{(2n)!(2m+1)}{(m+n+1)!(n-m)!}$ всегда целое число.
7. Докажите, что для всех n дробь $\frac{(6n)!n!}{(3n)!(2n)!(2n)!}$ всегда целое.
8. Пусть a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 такие целые неотрицательные числа, что $a_1 \geq b_1$, $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 2018$. Верно ли, что $\frac{a_1!a_2!a_3!}{b_1!b_2!b_3!}$ есть целое число.
9*. Докажите, что для $k \geq 2$ дробь

$$\frac{n\underbrace{!\ldots!}_{k}}{(n!)^{(n-1)!(n!-1)!(n!!-1)!\ldots\left(n\underbrace{!\ldots!}_{k-2}-1\right)!}}$$

есть целое число. В данном пункте задачи $n\underbrace{!\ldots!}_{m} = \left(\ldots\left((n!)!\right)\ldots\right)!$ (факториал применен m раз).

7. Неравенство со сдвигом (Фадин М., Горский С.М.)

Всюду в задаче $x_1, \ldots, x_n$ — положительные числа.
1. Верно ли неравенство

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2 + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2 \geq \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_1} + \frac{x_n}{x_2}.$$

2. Верно ли неравенство

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^3 + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^3 \geq \frac{x_1}{x_4} + \frac{x_2}{x_6} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{x_1} + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_3}.$$

3. Верно ли неравенство

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^k+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^k+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^k\geq\frac{x_1}{x_{1+k}}+\frac{x_2}{x_{2+k}}+\cdots+\frac{x_{n-2}}{x_{k-2}}+\frac{x_{n-1}}{x_{k-1}}+\frac{x_n}{x_k}$$
для натурального $k\geq 2$.
4. Верно ли неравенство
$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2\geq\frac{x_1}{x_{\sigma_1}}+\frac{x_2}{x_{\sigma_2}}+\cdots+\frac{x_{n-2}}{x_{\sigma_{n-2}}}+\frac{x_{n-1}}{x_{\sigma_{n-1}}}+\frac{x_n}{x_{\sigma_n}},$$
где $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ — циклический сдвиг чисел от 1 до n.
5. Верно ли неравенство
$$\left(\frac{x_1}{x_{\tau_1}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_{\tau_2}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_{\tau_{n-1}}}\right)^2+\left(\frac{x_n}{x_{\tau_n}}\right)^2\geq\frac{x_1}{x_{\sigma_1}}+\frac{x_2}{x_{\sigma_2}}+\cdots+\frac{x_{n-2}}{x_{\sigma_{n-2}}}+\frac{x_{n-1}}{x_{\sigma_{n-1}}}+\frac{x_n}{x_{\sigma_n}},$$
где $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ и $\tau_1,\ldots,\tau_n$ — циклические сдвиги чисел от 1 до n.
6. Верно ли неравенство
$$\left(\frac{x_1}{x_{\tau_1}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_{\tau_2}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_{\tau_{n-1}}}\right)^2+\left(\frac{x_n}{x_{\tau_n}}\right)^2\geq\frac{x_1}{x_{\sigma_1}}+\frac{x_2}{x_{\sigma_2}}+\cdots+\frac{x_{n-2}}{x_{\sigma_{n-2}}}+\frac{x_{n-1}}{x_{\sigma_{n-1}}}+\frac{x_n}{x_{\sigma_n}},$$
где $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ и $\tau_1,\ldots,\tau_n$ — перестановки чисел от 1 до n.

8. Перекраска куба

1. а) Куб $3\times3\times3$ сложен из 27 синих кубиков. Имеются также синяя и белые краски. За ход разрешается выбрать любой кубик и перекрасить его, а также все кубики, имеющие с выбранным общую грань, по правилу: синий — в белый, белый — в синий. Сделайте несколько ходов так, чтобы получился куб белый снаружи.
б) Рассмотрим всевозможные варианты окраски 26 видимых кубиков в синий и белые цвета (каждый кубик красится целиком в один из цветов). Каждый ли из этих вариантов можно получить из синего куба за несколько ходов?
2. Рассмотрите те же задачи для куба $4\times4\times4$ и других размеров.
3. Рассмотрите те же задачи, когда имеется три краски и синий перекрашивается в белый, белый перекрашивается в зеленый, зеленый — в синий.