Исследовательские задания к областному турниру юных математиков

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

1. Числа и корни

1.Найдите такие натуральные x, для которых верно

$\sqrt{x}$=S(x)-2,

где S(x)-сумма цифр числа x.

2. Найдите такие натуральные x, для которых верно

$\sqrt[3]{x}$=S(x)-3,

где S(x)-сумма цифр числа x.

3. Найдите такие натуральные $\overline{a_1a_2a_3a_4 \dots a_{n-1}a_n}$, для которых верно

$\sqrt[n]{\overline{a_1a_2a_3a_4 \dots a_{n-1}a_n}}$=S($\overline{a_1a_2a_3a_4 \dots a_{n-1}a_n}$)-n,

где S($\overline{a_1a_2a_3a_4 \dots a_{n-1}a_n}$)-сумма цифр числа $\overline{a_1a_2a_3a_4 \dots a_{n-1}a_n}$, т.е.

S($\overline{a_1a_2a_3a_4 \dots a_{n-1}a_n}$)= $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, n$\in\mathbb{N}$.

4. Найдите такие натуральные $\overline{a_1a_2a_3a_4 \dots a_{n-1}a_n}$, для которых верно

$\sqrt[k]{\overline{\overline{a_1a_2a_3a_4} \dots \overline{a_{n-1}a_n}}}$=S($\overline{a_1a_2a_3a_4} \dots \overline{a_{n-1}a_n}$)-k,

где S($\overline{a_1a_2a_3a_4} \dots \overline{a_{n-1}a_n}$)-сумма цифр числа $\overline{a_1a_2a_3a_4} \dots \overline{a_{n-1}a_n}$, т.е.

S($\overline{a_1a_2a_3a_4} \dots \overline{a_{n-1}a_n}$)= $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ n,k$\in\mathbb{N}$.

5. Предложите свои обобщения и направления задачи.

2. Неэкономное вырезание из бумаги.
Предисловие
Мы знаем, что дети очень часто вырезают нужные им фигуры из середины листа бумаги…
1.Дан квадрат 10×10. Из него в каком-то месте по линиям сетки вырезается квадрат 1×1, затем прямоугольники 1×2, 1×3, 1×4 и 1×5 (можно горизонтально, можно вертикально, то есть будем считать прямоугольники a×b и b×a равными).
а) Доказать, что из оставшейся части можно вырезать прямоугольник размером 1×6;
б) Привести пример, который показывает, что после вырезания прямоугольника 1×6, прямоугольник 1×7 может не получиться вырезать.

2. Дан квадрат n×n. Найти наибольшее натуральное k, для которого из этого квадрата по линиям сетки можно гарантированно вырезать квадрат 1×1, затем прямоугольники 1×2, …, 1×k, но при этом существует способ, показывающий, что после вырезания прямоугольника 1×k прямоугольник 1×(k+1) может не получиться вырезать.

3.Решите данную задачу при условии, что вырезаются квадраты
1×1, …, k×k.

3.Попробуйте решить данную задачу, если изначально дан не квадрат, а прямоугольник размером m×n.

Назовем элементарной фигурой порядка k (k-натуральное число)
а) правильный треугольник со стороной k;
б) для k=1 правильный треугольник со стороной 1,
для k>1 равнобедренную трапецию с углом при большем основании $\frac{\pi}{3}$, боковым ребром 1 и основаниями (k-1) и k;
в) ромб со стороной k и острым углом $\frac{\pi}{3}$;
г) для k=1 ромб со стороной 1 и острым углом $\frac{\pi}{3}$,
для k>1 параллелограмм со сторонами 1 и k и острым углом $\frac{\pi}{3}$.

4.Дан правильный треугольник со стороной n, разбитый на n^2 правильных треугольников со стороной 1. Для указанных выше пунктов а-г найти наибольшее

k, для которого из этого треугольника по линиям сетки можно гарантированно вырезать элементарные фигуры порядка
1, …, k, но при этом существует способ, показывающий, что после вырезания элементарной фигуры порядка k элементарную фигуру порядка (k+1) может не получиться вырезать.

5.Решите предыдущую задачу при условии, что дан ромб со стороной n и острым углом $\frac{\pi}{3}$, разбитый на $2n^2$ правильных треугольников со стороной 1.

6.Предложите свои обобщения.

3. Производная от числа

Всем известно, что производная от числа равняется нулю. Введём определение арифметической производной. Пусть D(m) – арифметическая производная от числа m, обладающая следующими свойствами:

- D(0) = D(1) = 0
- D(p)=1, где p является простым.
- D(m·n)= n·D(m) + m·D(n)
- D(−n)= −D(n)
- D($\frac{m}{n}$)= $\frac{nD(m)-mD(n)}{n^2}$

1. Найдите значение D(m^n).

2. Выясните, когда НОД(D(m); m)≠1, НОД(D(m); m)=1.

3. Найдите другие свойства D(m).

4. Если D(m)=D(x)·D(y), назовём такую производную составной, в противном случае (D(m)=D(m)·1) – простой.

a) Единственно ли разложение составных производных? Если нет, то сколько разложений можно получить для каждого m?
b) Верен ли аналог малой теоремы Ферма для простых производных? $D(m)^{D(n)-1}$ ≡1 mod(D(n)), если D(n) – простая производная

5. Существуют ли такие целые m, n, такие что

a) D(m)=m – найдите все значения m
b) D(m)·D(n)= m·n?
c) $\frac{D(m)}{D(n)} = \frac{m}{n}$?
d) D(m±n)=D(m)±D(n)?

e) Если D(m) – функция от m, D'(m) − производная, имеет ли решение уравнение D(D(m))=D'(m)? (Например, D($2p$)=p+2, D'($2p$)=(2+p)'=1 => надо решить уравнение D(2+p)=1)

6. Назовём "близнецами" числа с одинаковыми производными. Найдите все числа "близнецы" для $N \in \mathbb{Z}$.

7. Могут ли числа быть "близнецами" и при этом принадлежать разным кольцам? (Например, может ли натуральное число иметь "близнеца" обыкновенную дробь?)

4. Нахождение ГМТ

<u>Примечание:</u> во всех пунктах точки A и B различны, а точка C двигается только по тем точкам заданной фигуры, где точки A, B и C образуют невырожденный треугольник. ГМТ – геометрическое место точек.

1. На плоскости зафиксированы точки A и B, а также проходящая через них окружность w. Точка C двигается по этой окружности. Найдите ГМТ точки I – центра вписанной окружности треугольника ABC.

2. То же, что и в п.1, но теперь мы ищем ГМТ точки H – точки пересечения высот треугольника ABC.

3. То же, что и в п.1, но теперь мы ищем ГМТ точки M – точки пересечения медиан треугольника ABC.

Симедианой AN треугольника ABC называется такой отрезок, что M лежит на BC, а прямая AN симметричная медиане треугольника ABC из точки A относительно биссектрисы треугольника ABC из точки A. Известный факт, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

4. То же, что и в п.1, но теперь мы ищем ГМТ точки L – точки пересечения симедиан треугольника ABC.

5. Решите пункты 1-4, только теперь зафиксированы только точки A и B, а точка C движется по всей плоскости.

6. Решите пункты 1-4, только теперь зафиксированы только точки A и B, а точка C движется по прямой l, параллельной прямой AB.

7. На плоскости зафиксированы точки A и B, а также проходящая через них парабола w. Точка C двигается по этой параболе. Найдите ГМТ точки H – точки пересечения высот треугольника ABC.

8. На плоскости зафиксированы точки A и B, а также окружность w. Точка C движется по окружности w. Пусть точка T – проекция точки пересечения высот треугольника на медиану CM в треугольнике ABC. Найдите ГМТ точки T.

9. Предложите свои обобщения к задаче и решите их.

5. Суммарное количество цифр

1. Заметим, что $2^5 = 32$ состоит из двух цифр, $5^5 = 3\,125$ состоит из четырех цифр. Тогда суммарное количество цифр в этих двух числах $2 + 4 = 6$. А какое суммарное количество цифр в двух числах 2^{2023} и 5^{2023}?

2. Какое суммарное количество цифр в числах 8^{8092} и $25^{12\,138}$?

3. Тот же вопрос, но для чисел $2^{20232023}$ и $5^{20232023}$.

4. Найдите суммарное количество цифр в числах 2^n и 5^n, где n произвольное натуральное число. То есть, решите эту задачу в общем виде.

5. Тот же вопрос, но для чисел 20^n и 5^n, где n произвольное натуральное число.

6. Попробуйте решить задачу для чисел a^m и b^n, где a, b, m и n произвольные натуральные числа. Если не получается решить в общем виде, то хотя бы для некоторых a, b, m и n (как можно большего количества четверок натуральных чисел).

7. А если найти суммарное количество цифр в трех числах? Например, 2^n, 4^n и 5^{3n}. Проведите исследование, аналогичное пунктам 1 – 6 для трех чисел.

8. Предложите свои обобщения этой задачи.

6. Автомобили и стоянки города N

В городе N имеется ровно 300 автомобилей, номера которых 100, 101, …, 399 соответственно. Также в этом городе 50 стоянок, которые пронумерованы 00, 01, 02, …, 49. Машина X может припарковаться на стоянку Y тогда и только тогда, когда из номера этой машины X можно получить номер стоянки Y путем вычеркивания одной цифры. Возникают следующие вопросы.

1) Все ли машины могут припарковаться на стоянки?

2) Если ответ на первый вопрос да, то возможно стоянок в городе N слишком много и некоторые из них можно снести? Какое наименьшее количество стоянок необходимо оставить в городе N, чтобы на них можно было припарковать все машины?

3) Ответьте на вопросы 1) и 2), если в городе N ровно 1000 автомобилей, номера которых 000, 001, …, 999 соответственно.

4) Ответьте на вопрос 3) если при этом в городе 100 стоянок, которые пронумерованы 00, 01, 02, …, 99.

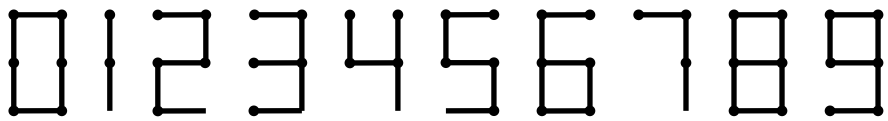
5) Ответьте на вопросы 1) и 2), если в городе N ровно 10000 автомобилей, номера которых 0000, 0001, …, 9999 соответственно, а стоянок 100 и пронумерованы они 00, 01, 02, …, 99. Машина X может припарковаться на стоянку Y тогда и только тогда, когда из номера этой машины X можно получить номер стоянки Y путем вычеркивания двух цифр.

6) А если автомобилей 10^k, где $k > 4$ натуральное число, стоянок 100 и, как и в пункте 5), машина X может припарковаться на стоянку Y тогда и только тогда, когда из номера этой машины X можно получить номер стоянки Y путем вычеркивания $k - 2$ цифр? (Нумерация стоянок и автомобилей по аналогии, как и раньше.)

7) Предложите свои обобщения задачи.

7. Функции на спичках

Цифры на клетчатой доске выкладываются спичками следующим образом.



Длина спички соответствует длине стороны клетки, расстояние между двумя соседними цифрами в числе ровно в одну клетку.

Пусть выложено некоторое число n, тогда $f_1(n)$ – наибольшее число, которое можно получить из n передвинув ровно 1 спичку. Например, $f_1(2) = 3$, $f_1(56) = 95$.

1) Для любого ли натурального n можно вычислить $f_1(n)$?
2) Всегда ли $f_1(n) > n$?
3) Найдите $f_1(n)$ для всех цифр n.
4) Найдите $f_1(n)$ для всех двузначных чисел n.
5) Пусть $f_2(n)$ отличается от $f_1(n)$ только тем, что передвигать надо ровно 2 спички. Ответьте на вопросы 1) – 4) для $f_2(n)$.
6) Пусть $g_1(n)$ отличается от $f_1(n)$ только тем, что в результате получится наименьшее натуральное, а не наибольшее число. Ответьте на вопросы 1) – 4) для $g_1(n)$.
7) Определите по аналогии $g_2(n)$ и исследуйте ее.
8) Пусть $h_1(n)$ отличается от $f_1(n)$ только тем, что не передвигают 1 спичку, а либо добавляют, либо убирают ровно одну спичку. Исследуйте $h_1(n)$.
9) Предложите свои обобщения задачи.

8. Площади и периметры

0.1. Прямоугольник разбит параллельными сторонам линиями на четыре части. Площади трех из частей известны. Найдите площадь четвертой части.

3	4
?	5

0.2. Прямоугольник разрезали двумя прямыми, параллельными сторонам, на четыре части. Площади трех из них равны 4, 8, 12. Чему может равняться площадь четвертой части?

0.3. Найдите площадь прямоугольника, помеченного знаком «?», если площади остальных прямоугольников указаны на рисунке.

?				20
			14	10
		32	28	
	35	40		
9	21			

0.4. Прямоугольник разрезан на 9 прямоугольников прямыми, параллельными сторонам. Периметры частей показаны на рисунке. Найдите периметр обозначенной части и периметр большого прямоугольника.

	4	3
5	2	
?		3

0.5. Лера разделила прямоугольник четырьмя прямыми на 9 прямоугольников и в каждой части написала, чему равен её периметр. Получилось 9 чисел как на картинке. Известно, что ровно в одном прямоугольнике Лера ошиблась. Найдите этот прямоугольник и исправьте ошибку Леры.

14	16	12
18	14	10
16	18	14

1. Прямоугольник разбит на mn меньших прямоугольников. Процедура заключается в следующем: можно указать на произвольный меньший прямоугольник и узнать его *площадь*. Какое наименьшее количество процедур надо совершить, чтобы а) узнать площадь исходного прямоугольника; б) узнать площадь любого прямоугольника, который не был указан.

2. Прямоугольник разбит на mn меньших прямоугольников. Процедура заключается в следующем: можно указать на произвольный меньший прямоугольник и узнать его *периметр*. Какое наименьшее количество процедур надо совершить, чтобы а) узнать периметр исходного прямоугольника; б) узнать периметр любого прямоугольника, который не был указан. в) Можно ли зная периметры каких-либо меньших прямоугольников найти площадь исходного

прямоугольника? А если среди меньших прямоугольников есть какое-то количество квадратов?

3. Лера разбила прямоугольник на mn меньших прямоугольников и в каждом из них записала число выражающее его а) периметр, б) площадь. Известно, что ровно в 1) одном, 2) двух, 3) k прямоугольников записано неверное число. Предложите алгоритм, позволяющий найти прямоугольник(и) с неверно записанным(и) числами и исправить ошибку(и).

9. Маша и факториалы

1. Практикуясь в умножении, Маша вычисляла факториалы некоторых чисел, и результаты записала в чистовик. Вернувшаяся с улицы кошка изодрала в клочья черновики с Машиной работой и грязными лапами прошлась по чистовикам, после чего некоторые цифры стали безнадёжно испорчены. Не вычисляя факториалов, найдите цифры скрытые звёздочкой.

1.1. $14! = 87\ 1 * 8\ 291\ 200$;

1.2. $15! = 1\ 3 ** \ 674\ 368\ 000$;

1.3. $20! = 2\ 432\ *** \ 008\ 176\ 640\ 000$;

1.4. $38! = 523\ 022\ 617\ 466\ 601\ *** \ 760\ *** \ 224\ 100\ 074\ 291\ 200\ 000\ 000$;

1.5. $22! = 1\ 124\ *** \ 727\ *** \ 607\ 680\ 000$;

1.6. $16! = 20\ 9 ** \ 7 * 9\ 8 * 8\ 000$.

2. Можно ли восстановить цифры, скрытые звёздочкой, $18! = 6\ 402\ * 7 * \ 7 ** ** \ 8\ 000$ не вычисляя факториала?

3. Чему равно наименьшее значение n, при котором в десятичной записи числа $n!$ можно восстановить в его записи а) 2, б) 3, в) 4, г) 5, д) m цифр, если эти цифры не являются нулём в последних цифрах числа?

4. *Сложностью восстановления* цифр в записи числа $n!$ назовём наименьшее число сравнений, необходимых для восстановления десятичной записи числа.

4.1. Чему равны сложности восстановления в подпунктах пункта 1?

4.2. При каком наименьшем значении n в десятичной записи числа $n!$ можно восстановить 6 цифр со сложностью восстановления 6?

4.3. При каком условии на расположение испорченных 6 цифр можно восстановить десятичную запись числа $n!$ со сложностью восстановления а) 2, б) 3, в) 4, г) 5, д) 6?

4.4. Обобщите предыдущий пункт.

5. Обобщите задачу, если Маша считала $n!$ в а) двоичной, б) шестнадцатиричной, в) двадцатиричной системе счисления.

10. Рекуррентные функции

Будем понимать функцию, как черный ящик, который по целым неотрицательным числам выдает целое неотрицательное число. Нам понадобятся функции от одного и от двух аргументов – соответственно, на вход они принимают одно или два числа.

1. Рассмотрим функцию f от двух аргументов. Известно, что $f(a, b) = f(b, a)$, значение $f(a, 0)$ определено однозначно для каждого a, и если

   $a > b$, то $f(a, b) = f(a - b, b)$. Докажите, что в таком случае функция f однозначно определена для всех значений (a, b).

2. Пусть при тех же условиях $f(a, 0) = a$. Чему равно $f(a, b)$?
3. Что произойдет со значением $f(a, b)$, если $f(a, 0)$ определять иным образом?
4. Поменяем определение функции f. По прежнему $f(a, b) = f(b, a)$ и $f(a, 0)$ заранее известно, но теперь $f(a, b) = T\big(f(a - b, b)\big)$, где $T(x)$-некоторая функция от одной переменной. Докажите, что значение $f(a, b)$ снова однозначно определяется для всех пар (a, b).
5. Пусть $T(x) = x + k$, где k – некоторое натуральное число; $f(a, 0)$ определено каким-либо образом. Чему в таком случае равно $f(a, b)$?
6. Рассмотрим функцию h от двух аргументов. Про нее известно следующее:
   а) $h(ac, b) = h(a, b) \cdot h(c, b)$ для любых a,b,c;
   б) $h(a, bc) = h(a, c) \cdot h(b, c)$ для любых a,b,c;
   в) $h(a, a)$ заранее определена однозначным образом;
   г) $h(a, b) = h(a \, mod \, b, b)$ при $a > b$ и $b > 0$;
   д) $h(0, t), h(1, t), h(2, t), h(t, 0), h(t, 1), h(t, 2)$ заранее определены однозначным образом;
   е) $h(p_{1,} p_2) = T\left(h(p_{1,} p_2)\right)$, где $p_{1,}\ p_2$ – нечетные простые числа, $p_{1<}\ p_2$,T-некоторая функция от одной переменной.

   Докажите, что значение $h(a, b)$ однозначно определено для всех значений (a, b).

Задачи предложили:

задача №1 — Потапенко Т. задача №2 — Левин В.Б.,задача №3 – Курочкина Д, задача №4 – Марковец Р., задачи №№ 5, 6, 7, —Симоненко Д.Н., задачи № 8, 9 — Горский С.М. задача №10 — Струк А.Н.