Исследовательские задания к областному турниру юных математиков 2019 года

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которые вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

ОТЮМ 2019

1. Диофантово уравнение

Для переменных x и y и параметра a задано уравнение

$$2^x + a = y^2, \quad (1)$$

которое требуется решить в целых числах для различных значений параметра a.

1) Для всех натуральных значений параметра $a \in [1; 16]$ найдите все пары целых чисел $(x; y)$, при которых уравнение (1) обращается в верное равенство.

2) Как можно для большего числа натуральных значений параметра a найдите все пары целых чисел $(x; y)$, при которых уравнение (1) обращается в верное равенство.

3) Решите уравнение (1) в целых числах для всех натуральных значений параметра a.

4) Предложите свои идеи развития этой задачи.

2. Функциональное уравнение

Во всех пунктах задачи функция f задана на всей числовой прямой.

1.1. Существует ли такая функция f, что для любого действительного значения x выполнено равенство

$$x = f(|x|) + |f(x)|? \qquad (1)$$

1.2. Найдите все функции f такие, что для любого действительного x выполнено равенство

$$x = -\frac{1}{2} f(|x|) + |f(x)|. \quad (2)$$

1.3. Найдите все функции f такие, что для любого действительного x выполнено равенство

$$x = \frac{3}{4} f(|x|) + |f(x)|. \quad (3)$$

2.1. Найдите все значения параметра a такое что

а) не существует такой функции f;

б) существует единственная функция f;

в) существует более одной функции f такой, что равенство

$$x = af(|x|) + |f(x)| \qquad (4)$$

выполнено для любого действительного x.

2.2. Найдите все значения параметров a и b такие что

а) не существует такой функции f;

б) существует единственная функция f;

в) существует более одной функции f такой, что равенство

$$x = af(|x|) + b|f(x)| \qquad (5)$$

выполнено для любого действительного x.

3.1. Решите функциональные уравнения (1)–(3), если в левой части вместо x будет стоять

а) константа a_0;

б) $a_1 x + a_0$;

в) $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;

г) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

хотя бы, для каких-то конкретных значений коэффициентов a_0, a_1, …, a_n.

3.2. Решите функциональные уравнения (4)–(5), если в левой части вместо x будут стоять функции из подпунктов 3.1.

Предложите свои обобщения.

3. Хороший, Плохой, Злой

У троих математиков — Хорошего (1), Плохого (2) и Злого (3) — появилось много противоречий и они решили разрешить их на дуэли. Дуэль представляет собой последовательность раундов. В каждом раунде каждый из участников пытается вывести какого-то другого участника.

Вероятность того, что i-й участник выведет из строя свою цель обозначим p_i.

Пусть в начале каждого раунда математики выбирают свою цель равновероятно из своих соперников.

I. Найдите вероятность того, что:

1. i-й математик останется в строю после n-ого раунда.
2. i-й математик будет выведен из строя в n-м раунде.
3. n-ый раунд окончится победой i-го математика.
4. n-ый раунд окончится ничьей.

В начале решите задачу для $n = 1$, 2 и 3 и $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$. Попробуйте решить задачу при других параметрах p_1, p_2 и p_3.

II. Противоречия между математиками неравномерны — для i-го и j-го математика определена вероятность t_{ij} того, что i-й математик будет выводить из строя j-го, если он еще не выведен из строя.

1. Пусть $t_{12} = t_{23} = t_{31} = \frac{1}{3}$ и $t_{13} = t_{32} = t_{21} = \frac{2}{3}$. Решите для этой ситуации задачи аналогичные I.

2. Решите задачи аналогичные I для произвольных t_{ij}.

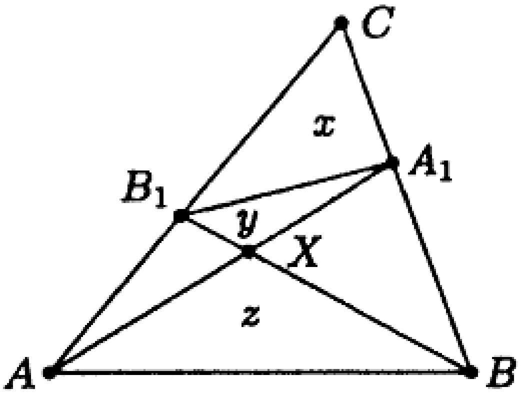
III. Перед дуэлью математики вспомнили о том, что они умеют думать. Теперь они выбирают цель не случайно а так, чтобы шансы их выживания в последующих раундах были как можно лучше.

1. Решите задачи аналогичные I для $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{3}{4}$ и $p_3 = \frac{1}{2}$.

2. Решите задачи аналогичные I для произвольных p_1, p_2 и p_3.

4. Треугольник

На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки B_1 и A_1 соответственно; отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке X. Обозначим площади треугольников B_1CA_1, B_1XA_1 и AXB через x, y, z соответственно (см. рисунок).



1. Докажите, что выполнены неравенства: а) $y < z$; б)$y < x$.

2. Может ли при некотором расположении точек A_1 и B_1 выполнятся условие $x = z$? Ответ обоснуйте.

3. Зная площади треугольников B_1CA_1, B_1XA_1 и AXB, найдите площадь треугольника ABC.

4. Можно ли найти площадь треугольника ABC зная только две (одну) из площадей треугольников B_1CA_1, B_1XA_1 и AXB?

5. Докажите, что выполнены неравенства:

а) $y < \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{xz}$; б) $y < \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{xz}$.

6. Можно ли усилить оценку из пункта 5?

5. **Незнайка и цифры числа**

1. Незнайка складывал два целых числа, сумма которых равна A. Однако он случайно поставил во втором слагаемом лишний 0 на конце и получил в сумме B. Знайка знает значение A и B. Выясните, при каких A и B Знайка сможет найти числа, которые складывал Незнайка и найдите эти числа.

2. Решите предыдущий пункт при условии, что Незнайка случайно поставил во втором слагаемом a) не 0, а лишнюю единицу на конце; b) не 0, а некоторое число C на конце.
3. Решите предыдущие пункты при условии, что второе число как минимум двузначное и Незнайка случайно все лишнее во втором слагаемом ставил не на конце, а на предпоследней позиции. То есть после вставленного Незнайкой во втором числе стояла еще одна цифра этого числа.
4. Переписывая число A, Незнайка потерял его первую цифру и получил число B. Пончик заметил, что число A в a) 57; b) 1876; c) 2019 раз меньше числа B. Прав ли Пончик? И если да, то найдите число A, если нет, поясните, почему вы так считаете.
5. Незнайка ищет такое десятизначное число $\overline{a_1a_2a_3...a_{10}}$, что первая цифра a_1 равна числу нулей в записи этого числа, вторая цифра a_2 – числу единиц, третья – числу двоек и т. д., последняя a_n – числу девяток в записи этого числа. Помогите ему найти это число.
6. Знайка попросил Незнайку найти сумму цифр дводцатимдевятизначного числа $\overline{a_1a_2a_3...a_{29}}$, в записи которого цифра a_k встречается a_{30-k} раз для всякого k (например, если $a_{17} = 2$, то цифра a_{13} встречается 2 раза). Помогите Незнайке.
7. Предложите свои идеи развития этой задачи.

6. Математический подход к поеданию пиццы

В понедельник Саше и Серёже принесли идеально круглую неразрезанную пиццу, и специальный нож, для резки пиццы, с помощью которого можно произвести только прямолинейный разрез. Сережа выбирает произвольную точку на пицце (но не на границе). Саша, достав транспортир и взяв в руки нож, начинает делить пиццу по следующему принципу: через отмеченную точку он проводит разрез, затем проводит новый разрез через отмеченную точку под углом 45° к предыдущему разрезу и так далее, пока вся пицца не распалась на 8 кусков. После того, как пицца разрезана Саша нумерует куски от 1 до 8, двигаясь против хода часовой стрелки с обязательным условием, что куски, имеющие общую границу, имеют соседние номера (исключение первый и восьмой). Серёжа, после пристального взгляда на пронумерованные куски пиццы объявляет, что все куски с чётными номерами съедает Саша, а с нечётными — он сам.

Докажите, что при таком дележе пиццы, и Саша, и Серёжа получат по половине пиццы. Одинаковые ли части корочки они получат?

Во вторник к Саше и Серёже присоединился Дима. Ритуал разрезания пиццы повторился, только резали уже не под углом 45°, а под углом 30°. Сережа съел все куски, чьи номера делились на три без остатка, Саша — те и только те куски, чьи номера при делении на три, давали остаток 1, а Дима — всё остальное.

Поровну ли съели пиццу персонажи?

В среду к Саше, Серёже и Диме присоединился Слава. *Как в этом случае надо резать пиццу и распределять куски пиццы*, если Сережа из принципа не выбирает центр пиццы?
Извините, но четверг был рыбный день.
В пятницу к Саше, Серёже, Диме и Славе присоединился Виталий. Саша уже хотел было резать пиццу под углом $18°$, здравый смысл подсказал, что надо взять две пиццы. *Можно ли разрезать каждую пиццу так, чтобы каждый съел одинаковое количество пиццы и при этом разрезы под углом менее* $20°$ *запрещены? А если будет не две пиццы, а три?*
Предложите свои обобщения.

7. Игры с числами
Во всех пунктах требуется найти все натуральные числа n, при которых Вася сможет выиграть независимо от того, как бы хорошо не играл Петя.
1) Вася и Петя играют в такую игру: Сначала Вася прибавляет к имеющемуся числу любое натуральное число от 1 до n. Затем Петя к полученной сумме также прибавляет любое натуральное число от 1 до n. Потом снова наступает ход Васи и и так по очереди. Игра начинается с числа 0. Выигрывает тот, кто получит a) число 100; b) число 2019.
2) Вася и Петя изменили правила игры, теперь игра начинается с числа 1 и за ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до n. Выигрывает же тот, кто первым получит число, a) большее 100; b) большее 2019.
3) А сейчас игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит a) 1000; b) 2019.
4) Вася и Петя решили вычитать числа. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью числа n (в том числе $1 = n^0$). Игра начинается с a) числа 1000; b) числа 2019. Выигрывает тот, кто получит 0.
5) Вася и Петя вспомнили про деление. Теперь за ход разрешается разделить число на n (если оно делится без остатка) или отнять число 1. Игра начинается с a) числа 1000; b) числа 2019. Выигрывает тот, кто получит 0.
6. Предложите свои обобщения. Например, рассмотрите вместо чисел 1000 и 2019 произвольные числа.

8. Похищение
А) В зале музея стоят по кругу 5 одинаковых шкатулок. Каждый вечер начальник охраны запирает две шкатулки по своему выбору, положив в одну из них бесценный алмаз. Подкупленный работник музей видит действия начальника и хочет оставить взломщику подсказку, где алмаз. Для этого он открывает крышки ровно у двух незапертых шкатулок, а остальные не трогает. Как ему заранее договориться со взломщиком, чтобы тот, придя ночью в музей и увидев, у каких двух шкатулок открыты крышки, сразу понял, где лежит алмаз?

Б) Та же задача, но в зале стоят по кругу 33 шкатулки, начальник запирает 16 шкатулок, положив в одну алмаз; взломщик должен понять, где алмаз, по двум шкатулкам, у которых открыты крышки.
В) Та же задача, но в зале по кругу стоят $2n+1$ шкатулка, начальник запирает n шкатулок, положив в одну алмаз; взломщик должен понять, где алмаз, по двум шкатулкам, у которых открыты крышки. Для любого ли натурального n это можно сделать? Если не для любого, то а) для каких значений n это можно сделать? б) можно ли будет узнать, где алмаз, если будут открыты три шкатулки?
Предложите свои обобщения.

Задачи предложили: *Симоненко Д.Н.* — №№ 1, 4, 7; *Мурашко В.И.* — № 3; *Струк А.Н.* — № 5. Источником вдохновения для *Горского С.М.* послужили по задачам №№ 6 и 8 — журнал «Квантик»; по задаче №2 — третий этап республиканской олимпиады 2019 года.