Исследовательские задания к областному турниру юных математиков

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения);
- **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);
- кроме этого, **дайте четкие ссылки на литературу и другие источники** (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

1. Сапёр

0.1 Таблица $n\times m$ ($n\le m$) заполняется по правилам, похожим на правила игры “Сапёр”, в некоторые клетки помещается по мине, а в остальные записывается количество мин в соседних с ними **по стороне** клетках. Затем вычисляется сумма записанных в таблице чисел.

Какое максимальное значение может принимать эта сумма?

0.2 Рассмотрите пункт 0.1, если записывается количество мин в соседних **по диагонали** клетках.

0.3 Таблица $n\times m$ ($n\le m$) заполняется по обычным правилам игры “Сапёр”, в некоторые клетки помещается по мине, а в остальные записывается количество мин в соседних с ними (**по стороне или вершине**) клетках. Затем вычисляется сумма записанных в таблице чисел. Какое максимальное значение может принимать эта сумма?

1.1 В некоторые грани

а) правильного тетраэдра;

б) куба

помещается по мине, а в остальные записывается количество мин в соседних по ребру гранях. Затем вычисляется сумма записанных чисел.

Какое максимальное значение может принимать эта сумма?
Попробуйте найти все значения, которые может принимать эта сумма.
1.2 В некоторые грани октаэдра помещается по мине, а в остальные записывается количество мин в соседних
а) по ребру гранях;
б) по ровно одной вершине гранях;
в) по ребру или вершине гранях.
Затем вычисляется сумма записанных чисел.
Какое максимальное значение могут принимать эти суммы?
Попробуйте найти все значения, которые могут принимать эти суммы.
1.3 Рассмотрите пункт 1.2 для додекаэдра и икосаэдра.
2. Попробуйте рассмотреть пункт 1.2 для
2.1 правильного треугольника со стороной n;
2.2 параллелограмма со сторонами n и m и острым углом $\frac{\pi}{3}$ ($n \le m$);
2.3 равнобедренной трапеции с углом при большем основании $\frac{\pi}{3}$, боковым ребром (m-n) и основаниями n и m ($n<m$, n и m –натуральные числа),
которые прямыми линиями разбиты на правильные треугольники со стороной 1.
3.Дан куб $m\times n\times k$ ($m\ge n\ge k$), разбитый плоскостями на единичные кубики.
В некоторые единичные кубики помещается по мине, а в остальные записывается количество мин в соседних с ними
а) по грани кубиках;
б) ровно по одному ребру кубиках;
в) ровно по одной вершине кубиках;
г) хотя бы по одной вершине кубиках
Затем вычисляется сумма записанных чисел.
Какое максимальное значение могут принимать эти суммы?
4.Предложите свои обобщения данной задачи.

2. Линейка без делений

1. Имеется линейка длиной 9 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить или измерить любой отрезок длиной 1 см, 2 см, 3 см, … или 9 см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)? Ответ объясните.
2. Имеется линейка длиной 13 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить все отрезки длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 10 см, 11 см, 12, 13 см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)?
3. Исследуйте задачу, подобную пунктам 1 и 2, для линеек с другими длинами.
4. **А)** Имеется веревочка длиной 9 см. На ней можно завязать маленькие узелки на определенных расстояниях от краев, для того, чтобы с помощью такой веревочки можно было измерять расстояния (например, если завязать узелок на расстоянии

1 см от левого края, то можно измерить отрезок, равный 8 см). Каждый завязанный узелок не меняет длины веревочки. Какое наименьшее число узелков требуется завязать, чтобы можно было измерить все расстояния длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 9 см, прикладывая веревочку лишь один раз? (Разрешается сгибать веревочку, но только один раз и в том месте, где завязан узелок)?

Б) Рассмотрим задачу, аналогичную пункту **А)** с веревочкой длиной 13 см, причем отмерить нужно все расстояния, равные 1 см, 2 см, …, 13 см. Вновь прикладывать веревочку можно лишь один раз, но сгибать ее на этот раз можно не более одного раза в любом месте веревочки.

5. Исследуйте задачу, подобную пунктам 4. А) и Б) для веревочек с другими длинами.
6. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их

3. Игра

0.1. Аня и Таня играют в следующую игру. Игроки по очереди (Аня ходит первой) выкладывают одинаковые монетки на круглый стол (по одной за ход). Запас монеток неограничен. Проигрывает та девочка, которая не сможет положить монетку (накладывать монетки друг на друга нельзя). Кто выиграет при правильной игре (правильная игра – игра когда каждый знает правила и старается выиграть)?

0.2 Докажите, что у Ани есть выигрышная стратегия при игре на квадратном столе.

0.3 К игре подключилась Света. Девочки играют в следующей последовательности: первой ходит Аня, вторая –Таня, третья - Света. Докажите, что Аня и Света могут выбрать такую стратегию игры, что Таня проиграет.

0.4 Существует ли такая форма стола, что, играя второй, Таня выиграет у Ани, если они будут играть вдвоем?

I. На доске $1 \times n$ Аня и Боря играют в следующую игру: они по очереди (Аня ходит первой) кладут монетку в клетки доски, при условии, что и сама клетка и соседние с ней клетки тоже пусты. Тот, кто не может сделать ход, тот проиграл.

1. Докажите, что для любого нечётного n, у Ани есть выигрышная стратегия.
2. Докажите, что при $n = 6$ у Ани есть выигрышная стратегия.
3. Докажите, что при $n = 8$ у Бори есть выигрышная стратегия.
4. При каких значениях n у Ани есть выигрышная стратегия? При каких значениях n у Бори есть выигрышная стратегия?

II. Игра такая же, как и в пункте I, но монетку можно класть на клетку доски при условии, что и сама клетка, и r клеток справа от неё, и l клеток слева от неё пусты (лево для Ани и Бори находится с одной стороны доски). При $r = l = 1$ получаем игру из пункта I.

5. Попробуйте найти все значения n для которых у Ани есть выигрышная стратегия при $r = 1$, $l = 2$.
6. Попробуйте найти все значения n для которых у Ани есть выигрышная стратегия при каких-то фиксированных r и l.

III. На доске $m \times n$ Аня и Боря играют в следующую игру: они по очереди (Аня ходит первой) кладут монетку в клетки доски, при условии, что и сама клетка и соседние с ней клетки тоже пусты (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Тот, кто не может сделать ход, тот проиграл.

7. Определите значения m и n, при которых а) у Ани, б) у Бори есть выигрышная стратегия.

IV. Предложите свои обобщения или направления исследований в этой задаче и изучите их.

4. Теннисная комбинаторика

1.1. На соревнованиях по теннису, проведенным в один круг (каждый играл с каждым только один раз) было проведено 10 игр. Сколько игроков приняло участие в турнире? Ответ обоснуйте.

1.2 На соревнования по теннису подали заявку 2023 человека. Соревнования проводится в один круг. Сколько матчей должно быть сыграно? Ответьте на тот же вопрос, если участников n.

1.3 На соревнованиях по теннису, в котором участвуют 5 школьников было сыграно 6 игр. Больше всех игр провели Миша и Ваня – по 3. Какое число матчей провел участник, сыгравший меньше всего матчей? Ответ обоснуйте.

2. В турнире по теннису, проведенным в один круг, два участника заболели и выбыли до того, как сыграли половину от запланированных ими игр. Турнир продолжился с учетом всех игр, в том числе с учетом игр сыгранных выбывшими игроками. Всего в турнире было сыграно 60 игр. Сколько всего было участников в начале этих соревнований?
3. В турнире по теннису (где не бывает ничьих) участвовало более 4 спортсменов. Каждый игровой день каждый теннисист принимал участие ровно в одной игре. К завершению турнира каждый сыграл с каждым в точности один раз. Назовём игрока упорным, если он выиграл хотя бы один матч и после первой своей победы ни разу не проигрывал. Остальных игроков назовём неупорными. Верно ли, что игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, больше половины?

5. Предложите свои обобщения.

5. Многочлены и их свойства.

Определение. Многочлен называется *непостоянным*, если он отличен от константы

1. Дан многочлен нечетной степени $P(x)$. Докажите, что у уравнения $P(P(x))=0$ различных действительных корней не меньше, чем у уравнения $P(x)=0$.

2. В выражении $(x^4+x^3-3x^2+x+2)^{2023}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент. Верно ли это для выражения

$(x^4+x^3-3x^2+x+2)^{2022}$?

3. Лёша с каждым приведенным квадратным трехчленом делает следующее: рисует его график, ищет точки пересечения с осями координат и, если получит 3 точки, проводит через эти точки окружность. Докажите, что все такие окружности проходят через одну точку.

4. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c при всех целых x является точным квадратом. Докажите, что найдутся целые числа d и e такие, что при всех действительных x верно $ax^2+bx+c=(dx+e)^2$.

5. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с натуральными коэффициентами. Докажите, что найдется целое число k такое, что $P(k), P(k+1), \ldots, P(k+2024)$ –составные.

6. Существует ли многочлен с хотя бы одним отрицательным коэффициентом, все натуральные степени (выше первой) которого имеют положительные коэффициенты?

7. Предложите свои обобщения и направления исследования задачи.

6. Треугольник и окружность

Пусть I и I_A – центры вписанной и вневписанной для вершины A окружностей остроугольного треугольника ABC (AB < AC). Вписанная окружность касается BC в точке D. Пусть AD пересекает BI_A и CI_A в точках K и L, соответственно.

0) Докажите, что IBI_AC – вписанный четырёхугольник.

Докажите мини Лемму. Пусть ABCD – выпуклый четырёхугольник. AB и CD пересекаются в E, AD и BC пересекаются в F. Докажите, что окружности ABF, CDF, ADE, BCE пересекаются в одной точке.

1) Докажите, что одна из точек пересечения окружностей BDK и KI_AL лежит на окружности I_ABC. В следующих пунктах обозначим эту точку пересечения окружностей за M.

2) Докажите, что $IM \perp I_AM$.
3) Докажите, что $\angle AIM = \angle ADM$.
4) Докажите, что $\angle IDM + \angle MKI_A = 270°$.
5) Опираясь на предыдущие пункты, докажите, что окружности AID и KI_AL касаются друг друга.

Примечание. При доказательстве любого пункта можно предыдущие пункты задачи использовать как факты.

7. Авиапутешественник.

Имеется некоторая страна, в которой есть N городов. Каждый город связан двусторонним авиасообщением с k другими городами. При этом из любого города можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками. Путешественнику нужно добраться из города *А* в город *Б*. Какого наименьшего числа перелётов ему гарантированно хватит?

1. Рассмотрите эту задачу, если $k = 2$, $N > 2$.
2. Решите задачу при $N = 10$, $k = 3$.
3. Решите задачу при $N = 100$, $k = 3$.
4. Исследуйте случай $k = 3$, а N любое целое число, большее k.
5. Рассмотрите эту задачу, если $k = 4$, $N > 4$. Постройте аналоги пунктов 2–4.
6. Исследуйте задачу в общем виде.
7. Предложите и исследуйте свои обобщения. Например, случай, когда города связаны с различным числом других городов.

8. Покрывающие прогрессии.

Множество целых чисел $A = \{ak + b \mid k \in \mathrm{Z}\}$, где $a \neq 0$ и b – некие целые числа будем называть бесконечной в обе стороны арифметической прогрессией. При этом любой элемент этого множества – это члены прогрессии, a – это разность этой арифметической прогрессии, а b – нулевой член.

Будем говорить, что совокупность непересекающихся прогрессий $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ покрывает множество B, если для любого элемента $x \in B$ найдется ровно одна прогрессия A_i, которой x принадлежит. При этом число k называется мощностью покрытия.

В пунктах с 0 по 5 найти минимальную возможную мощность покрытия множества B:

0. Множество B состоит из всех целых чисел из отрезка [1; 10], кроме числа $b \in [1; 10]$. При этом b может быть любым целым числом от 1 до 10.

1. Множество B такое же, как и в пункте 0, но имеется дополнительное условие: число b не принадлежит ни одной прогрессии из покрытия.

2. Множество B состоит из всех целых чисел из отрезка [1; 10], кроме двух целых чисел $b_1, b_2 \in [1; 10]$ и b_1, b_2 не принадлежат ни одной прогрессии из покрытия.

3. Множество B состоит из всех целых чисел из отрезка [1; 10], кроме трех целых чисел $b_1, b_2, b_3 \in [1; 10]$ и b_1, b_2, b_3 не принадлежат ни одной прогрессии из покрытия.

4. Рассмотрите аналог пунктов 1–3, но вместо отрезка [1; 10] возьмите отрезок [1; 50].

5. Обобщите пункты 1–3 на отрезок [1; n], где n – произвольное натуральное число, большее трех.

6. Можно ли покрыть множество всех целых чисел без числа 1 совокупностью бесконечного числа непересекающихся прогрессий $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots\}$ так, чтобы число 1 не принадлежало ни одной прогрессии из совокупности.

7. Можно ли покрыть множество всех целых чисел без чисел 1 и 8 совокупностью бесконечного числа непересекающихся прогрессий $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots\}$ так, чтобы числа 1 и 8 не принадлежали ни одной прогрессии из совокупности.

8. Предложите свои обобщения задачи и рассмотрите их.

9. Рыцарские турниры.

I. Турнир между орденом Тамплиеров и Тевтонским орденом происходит в виде ряда поединков, в каждом из которых сражаются между собой один рыцарь из ордена Тамплиеров и один рыцарь Тевтонского ордена. Всего рыцарей, участвовавших в турнире N. Известно, что не найдется k тамплиеров, которые сразились с одинаковым числом тевтонцев. Какое наибольшее число тамплиеров участвовало в турнире?

1. Ответьте на вопрос задачи, если $k = 2$. Ответ получите в зависимости от N.
2. Ответьте на вопрос задачи, если $N = 55$ и $k = 4$.
3. Ответьте на вопрос задачи, если $N = 2024$ и $k = 4$.
4. Ответьте на вопрос задачи, если $k = 4$. Ответ получите в зависимости от N.
5. Ответьте на вопрос задачи в общем случае.

II. Турнир проходит по правилам пункта I, но за победу в поединке начисляют 2 очка, за ничью 1 очко, за проигрыш 0 очков. И в отличие от пункта I на этот раз известно, что не найдется k тамплиеров, которые получили бы одинаковое число очков за турнир. Какое наибольшее число тамплиеров участвовало в турнире?

Ответьте на вопросы аналогичные 1–5 из пункта I.

III. Турнир проходит полностью как в пункте II, но за победу в поединке начисляют 3 очка, за ничью 1 очко, за проигрыш 0 очков. Не найдется k тамплиеров, которые получили бы одинаковое число очков за турнир. Какое наибольшее число тамплиеров участвовало в турнире?

Ответьте на вопросы аналогичные 1–5 из пункта I.

IV. В турнире участвуют рыцари трех орденов (ордена Тамплиеров, Тевтонского ордена и Госпитальеры). При этом в каждом поединке сражаются между собой два рыцаря из различных орденов. Всего рыцарей, участвовавших в турнире N. Известно, что не найдется k тамплиеров, которые сразились с одинаковым числом тевтонцев. Также не найдется k тевтонцев, которые сразились с одинаковым числом госпитальеров. Какое наибольшее число тамплиеров участвовало в турнире?

Ответьте на вопросы аналогичные 1–5 из пункта I.

V. Обобщите пункт IV по аналогии, как пункты II и III обобщают пункт I.

VI. Предложите и решите свои обобщения этой задачи.

10. Незнайка раскрашивает таблицы.

1. Незнайка похвастал, что как бы не окрашивать клетки таблицы 10×10, каждую в один из двух цветов: белый или черный, он сможет найти прямоугольник (возможно

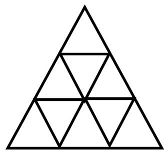
квадрат), вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток (назовем его одноцветным). Прав ли Незнайка?

2. В пункте 1 заменим таблицу 10×10 на таблицу $n\times n$. При каком наименьшем n Незнайка всегда (т. е. при любой окраске) сможет найти одноцветный прямоугольник (возможно квадрат)?

3. А если окрашивать не в два, а в три цвета? Исследуй пункты 1 и 2 в этом случае.

4. Логично обобщить пункт 2 на $k > 3$ цветов. При каком наименьшем n (в зависимости от k) в этом случае Незнайка всегда (т. е. при любой окраске) сможет найти одноцветный прямоугольник (возможно квадрат)?

5. Рассмотрите аналог пунктов 1–4, но для треугольной таблицы. Пример такой таблицы для $n = 3$ изображен справа. Понятно, что Незнайка будет искать не прямоугольники, а одноцветные равносторонние треугольники.



6. А если в пункте 5 искать одноцветные параллелограммы?

7. Предложите свои общения задачи. Например, на трехмерное пространство.

11. Диофантовы уравнения

Пусть m, n – квадраты натуральных чисел. Решите уравнения:

1. $m^3 = 2n - 1$.

2. $m^7 = 2n - 1$.

3. $m^{11} = 2n - 1$.

4. $m^{pk} = 2n - 1$, $k \in \mathbb{N}$, p – простое, $p \equiv 3 \ (mod\ 4)$.

5. $m^5 = 2n - 1$.

6. $m^{pk} = 2n - 1$, $k \in \mathbb{N}$, p – простое, $p \equiv 1 \ (mod\ 4)$.

7. $m = 2n - 1$.

8. $m^l = 2n - 1$, $l \in \mathbb{N}$.

9. Предложите свои обобщения этой задачи.

12. Разноцветные отрезки

Дано натуральное число n > 2. Пусть на плоскости отмечены k (k ≥ 3) различных точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой), попарно соединенных отрезками. Каждый из отрезков покрашен в один из n данных цветов (причем есть отрезки каждого цвета) так, что выполняется следующее условие: если в некотором треугольнике с вершинами в данных точках две стороны покрашены в один цвет, то и третья сторона покрашена в этот же цвет.

0. Какое максимальное значение может принимать k при n=3?

1. Какое максимальное значение может принимать k при $n=8$?

2. Какое максимальное значение может принимать k при $n=p+1$, где p – простое число?

3. Какое максимальное значение может принимать k для любого заданного n?

Поменяем условие задачи. Дано натуральное число $n > 2$. Пусть на плоскости отмечены k ($k \geq m$) различных точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой), попарно соединенных отрезками. Каждый из отрезков покрашен в один из n данных цветов (причем есть отрезки каждого цвета) так, что выполняется следующее условие: если в некотором m-угольнике с вершинами в данных точках более половины сторон покрашены в один цвет, то и остальные стороны покрашены в этот же цвет.

4. Какое максимальное значение может принимать k для любого заданного n при $m=4$?

5. Какое максимальное значение может принимать k для любого заданного n при $m=5$?

6. Какое максимальное значение может принимать k для любого заданного n при любом заданном m?

7. Предложите свои обобщения задачи.