Исследовательские задания к областному турниру юных математиков

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

1. (a,b,c) – треугольник

Пусть даны целые неотрицательные числа $a \leq b \leq c$. Треугольник на клетчатой плоскости с вершинами в узлах клеток назовем (a, b, c) – треугольником, если на одной его стороне расположено a узлов (не считая вершин), на другой стороне — ровно b вершин, на третьей стороне — ровно c вершин. Узел — вершина каждого из маленьких квадратов (клеток).

I. Рассмотрим на координатной плоскости клетку порожденную прямыми $x = a$, $y = b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$.

1. Пусть вершины треугольника расположены в точках с координатами $A(3,0)$, $B(0,4)$ и $C(0,0)$. Определите $a, b, c,$ для которых данный треугольник является (a, b, c) – треугольником.

2. Пусть вершины треугольника расположены в точках с координатами $A(6,0)$, $B(0,8)$ и $C(0,0)$. Определите $a, b, c,$ для которых данный треугольник является (a, b, c) – треугольником.

3. Изобразите на плоскости $(0,1,2)$ – треугольник. Можно ли построить два неравных $(0,1,2)$ – треугольника?

II.

1) Существует ли (9,10,11) – треугольник?

2) При каких минимальных значениях a, b, c существует (a, b, c) – треугольник?

3) Найдите все тройки натуральных чисел $a \leq b \leq c$, для которых существует (a, b, c) – треугольник.

4) Для каждой такой тройки найдите минимальную возможную площадь (a, b, c) – треугольника.

5) Можно ли найти максимальную возможную площадь (a, b, c) – треугольника, для каждой тройки натуральных чисел $a \leq b \leq c$? Если можно, то как?

2. Числа харшад (Х-числа)

I. Назовем **числом харшад (Х-числом)** число, которое делится на сумму своих цифр.

1) Выпишите все харшад-числа от 1 до 100.

2) Найдите наибольшее трёхзначное харшад-число.

3) Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{s(x)}$, где x — трёхзначное харшад-число, а $s(x)$ — сумма цифр числа x.

4) Докажите, что все числа с суммой 3 или 9 – Х-числа.

5) Постройте харшад-число с суммой цифр равной а) 15,б) 17, в) 51, г) 239.

6) Докажите, что для любого натурального m существует Х-число с суммой, равной m.

II. Длинные ряды.

А) Назовем рядом длины k последовательность чисел n, n+1, n+2, …,n+k-1 которые все являются Х-числами. Например, ряд длины 3 из чисел 110, 111, 112 (или 1010, 1011, 1012).

1) Приведите пример ряда длины 5.

2) Докажите, что существует ряд длины 10.

3) Можно ли найти ряд из более, чем 20 Х-чисел? Ответ обоснуйте.

Б) Выберем произвольное натуральное число q>1 и будем рассматривать ***q*-*X* числа**, т.е. числа, которые больше q^2 и которые делятся на сумму своих цифр, записанную в q-ичной системе счисления. Например, 10 является 3-Х числом, поскольку в троичной системе оно записывается как $101 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$ и притом, делится на 2.

1) Постройте ряд из 4 подряд чисел харшад в двоичной системе.

2) Докажите, что в двоичной системе не может стоять подряд 5 чисел харшад.

3) Докажите, что для любого натурального n существует такое q, что в q-ичной системе существует n подряд q-X чисел.

3. Катя и кот

Имеются три непрозрачных коробки, стоящие в ряд, в одной из коробок сидит кот. Утром Катя открывает одну из коробок, если там нет кота, то Катя разочаровывается. Ночью кот перелазит в соседнюю коробку и остаётся в ней до утра.

1. Сколько раз по утрам Катя необходимо открыть коробки (и укажите, какие именно ей надо открыть коробки), чтобы гарантированно найти кота. (Имеется ввиду наименьшее количество открываний коробок.)
2. Тот же вопрос, но коробок, в которых может спрятаться кот — 4. Сколько есть у Кати способов это сделать?
3. Тот же вопрос, если имеется 5 коробок. Сколько есть у Кати способов это сделать?
4. Тот же вопрос, если коробок 2021. За какое наименьшее количество открываний Катя найдёт кота, если она будет открывать по а) 2, б) 3, в) n коробок за раз?
5. Предложите свои обобщения, например, если кот перелазит не в соседнюю коробку, а через одну.
6. Рассмотрим квадрат размером 3х3 клетки. Пусть в узлах сетки стоят коробки. Какое наименьшее число коробок нужно открыть Кате, чтобы гарантированно найти кота? (Сможет ли она это сделать?)
7. Ответьте на вопрос пункта 6, если квадрат имеет размеры nxn. Какое наименьшее количество коробок за раз нужно открывать Кате, чтобы гарантированно найти кота и как она должна открывать коробки?

4. Мудрецы.

1.1. В одной урне лежало три белых шара, в другой – два белых и один чёрный, в третьей – один белый и два чёрных, в четвёртой-три чёрных. Шутник перевесил таблички с составом урн так, что теперь каждая из них указывает состав урн неправильно. Четырём мудрецам предложили вынуть два шарика из трёх и, имея шарики и неправильные таблички, определить цвет последнего шарика в урне. Трое из них были глухими, и они не слышали, что говорят остальные, а четвёртый был слепым. Первый мудрец сказал: «Я достал два чёрных шарика и могу определить цвет последнего шарика». Второй мудрец сказал: «Я вынул один белый и один чёрный и знаю, какой шарик остался в урне». Третий мудрец сказал: «Я вынул два белых шарика, но определить цвет последнего шарика невозможно». Четвёртый мудрец даже не видел таблички на своей урне. Однако он сказал: «Мне не надо

вынимать шарики. Я знаю, какие шарики лежат в моей урне. Я даже знаю цвета шариков, которые остались в урнах у каждого из моих товарищей». Определите, как и к каким выводам пришёл слепой мудрец.
1.2. Предположим, что третий мудрец сказал: «Я вынул два белых шарика и могу определить цвет последнего шарика». Сможет ли в данном случае четвёртый мудрец прийти к каким-нибудь выводам?
1.3. Ответьте на тот же вопрос в предположении, что второй мудрец сказал: «Я вынул один белый и один чёрный, но определить цвет последнего шарика невозможно».
1.4. Рассмотрите другие варианты ответов первых трёх мудрецов. Сможет ли четвёртый мудрец прийти к каким-нибудь выводам?
2. Рассмотрите случай с пятью мудрецами и четырьмя шарами. В одной урне лежало четыре белых шара, в другой – три белых и один чёрный, в третьей – два белых и два чёрных, в четвёртой - один белый и три чёрных, в пятой-четыре чёрных. Шутник перевесил таблички с составом урн так, что теперь каждая из них указывает состав урн неправильно. Пяти мудрецам предложили вынуть три шарика из четырёх и, имея шарики и неправильные таблички, определить цвет последнего шарика в урне. Четверо из них были глухими, и они не слышали, что говорят остальные, а пятый был слепым. Первый мудрец сказал: «Я достал три чёрных шарика и могу определить цвет последнего шарика (определить цвет последнего шарика невозможно)». Второй мудрец сказал: «Я вынул один белый и два чёрных и знаю, какой шарик остался в урне (определить цвет последнего шарика невозможно)». Третий мудрец сказал: «Я вынул два белых и один чёрных шарик и могу определить цвет последнего (определить цвет последнего шарика невозможно)». Четвёртый мудрец сказал: «Я вынул три белых шарика и могу определить цвет последнего (определить цвет последнего шарика невозможно)». При каких ответах первых четырёх мудрецов пятый мудрец сможет прийти к каким-нибудь выводам?
3. Предположите, что слепых мудрецов не один, а два. Смогут ли они прийти **хоть к каким-нибудь** выводам.
4. Рассмотрите случай n мудрецов и (n-1) шаров.
5.Попробуйте предложить и рассмотреть свои обобщения.

5. Снаружи и внутри

В чаще тропических джунглей расположен госпиталь, в котором работают три хирурга. Вождь местного племени поступил в госпиталь на операцию. Ввиду особой сложности операции, её должны были проводить, сменяя друг друга, все три хирурга. В районе, где находится госпиталь бушует эпидемия и каждый может оказаться носителем заболевания. Каждый хирург оперирует в тонких резиновых перчатках. Если он болен, то инфицируется внутренняя поверхность перчаток, соприкасающаяся с его руками. Если болен вождь, то инфицируется наружная поверхность перчаток.

1. В госпитале осталось только две пары стерильных перчаток. Как хирурги должны надеть перчатки, чтобы исключить возможность заражения друг друга и вождя?
2. Хватит ли трёх пар стерильных перчаток, если операцию вождю должны провести сменяя друг друга 5 хирургов?
3. Какое наименьшее количество пар стерильных перчаток понадобится для операции, если её должны провести 10 хирургов, сменяя друг друга?
4. Какое наименьшее количество пар стерильных перчаток понадобиться, чтобы четыре хирурга провели операцию, причём сперва оперирует первая пара хирургов, а затем её сменяет вторая пара хирургов.
5. Какое наименьшее количество пар стерильных перчаток понадобиться, если три хирурга должны последовательно сменяя друг друга провести две однотипные операции на двух пациентах? (Три хирурга сменяя друг друга оперируют одного пациента, а потом втроем, сменяя друг друга,— второго.)
6. Обобщите задачу.

6. О средних

Введем обозначения.

$$H_{\lambda,p}(x,y)=\begin{cases}\left((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\right)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0;\\ x^{1-\lambda}y^{\lambda}, & p=0.\end{cases}$$

$$L_{\lambda,h}(x,y)=h(1-\lambda)x+h(\lambda)y.$$

1. Пусть $h(\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{1-\lambda}}$.

   а) Докажите, что для любых положительных x и y и любого $\lambda\in(0;1)$ верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y)\geq H_{\frac{1}{2},-1}(x,y)$.

   б) Найдите наибольшее значение p, такое что для любых положительных x и y и любого $\lambda\in(0;1)$ верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y)\geq H_{\frac{1}{2},p}(x,y)$.

   в) Найдите наибольшее значение p, такое что для любых положительных x и y и любого $\lambda\in(0;1)$ верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y)\geq H_{\frac{1}{4},p}(x,y)$.

   г) Найдите наибольшее значение p, такое что для любых положительных x и y и любого $\lambda\in(0;1)$ верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y)\geq H_{\frac{3}{4},p}(x,y)$.

   д) Найдите наибольшее значение p, такое что для любых положительных x и y и любого $\lambda\in(0;1)$ верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y)\geq H_{\lambda,p}(x,y)$.

   е) Найдите наибольшее значение p, такое что для любых положительных x и y и любого $\lambda\in(0;1)$ верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y)\geq H_{1-\lambda,p}(x,y)$.

2. Для заданного значения p_0 предложите способ нахождения функции $h: (0;1) \to [0;+\infty)$, чтобы для любого $\lambda \in (0;1)$, любых положительных x и y и для всех $p \le p_0$ неравенство, приведенное ниже, было верным, но при $p > p_0$ оно уже не было верным.
   а) $L_{\lambda,h}(x,y) \ge H_{\frac{1}{2},p}(x,y)$.
   б) $L_{\lambda,h}(x,y) \ge H_{\lambda,p}(x,y)$.
3. Предложите свои обобщения.

*7. **Интересное тождество***

I. Интересное тождество

1) Докажите, что для произвольных действительных чисел a, b, c имеет место тождество
$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ac) - abc.$
2) К чему сводится это тождество, если $abc = 1, ab+bc+ac = 1$?
3) Какие условия можно получить из тождества, если $abc = 0$?
4) К чему сводится тождество, если $a+b+c = 0$?

II. Тождество и неравенства

1) Пусть a, b, c – неотрицательные числа. Докажите, что
$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac).$
2) Пусть a, b, c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Докажите, что
$ab+bc+ca \le \frac{3}{4}$.
3) Пусть a, b, c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$. Докажите, что
$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2(1+a+b+c).$
4) Пусть a, b, c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$. Докажите, что
$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 4(a+b+c-1).$

III. Тождество и тригонометрия

1) Докажите, что если α, β, γ – углы треугольника, то после замены
$a = tg\frac{\alpha}{2},\ b = tg\frac{\beta}{2},\ c = tg\frac{\gamma}{2}$ получается $ab+bc+ac = 1$.
2) Докажите, что для углов треугольника выполняются неравенства:
А) $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
Б) $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \le \frac{3}{2}$.

8. Автобусы

1. В одном городе есть несколько (более одного) автобусных маршрутов. При этом:
1) на каждом маршруте ровно две остановки;
2) с каждого маршрута на каждый можно пересесть и, при этом на одной остановке;
3) с каждой остановки на каждую можно проехать без пересадки, и при этом только одним маршрутом. Сколько автобусных маршрутов в этом городе?

2. В одном городе есть несколько (более одного) автобусных маршрутов. При этом:
1) на каждом маршруте ровно три остановки;
2) с каждого маршрута на каждый можно пересесть и, при этом на одной остановке;
3) с каждой остановки на каждую можно проехать без пересадки, и при этом только одним маршрутом. Сколько автобусных маршрутов в этом городе?

3. В одном городе есть 57 автобусных маршрутов. При этом:
1) на каждом маршруте не менее трех остановок;
2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного маршрута на другой;
3) с каждой остановки на каждую можно проехать без пересадки. Сколько остановок имеет каждый из маршрутов?

4.Ответьте на вопрос пункта 3, если всего маршрутов n.

5. Предложите свои направления и обобщения задачи.

9. Точка на окружности

1. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. На меньшей дуге AB отметили точку P. Докажите, что $PC = PA + PB$.
2. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC ($BC = AC$). На меньшей дуге AB отметили точку P. Докажите, что $PC = \frac{AC}{AB}(PA + PB)$.
3. В окружность вписан треугольник ABC. На дуге AB, которая не содержит точку C, отметили точку P. Докажите, что $PC = \frac{BC}{AB}PA + \frac{AC}{AB}PB$.
4. В окружность вписан правильный пятиугольник $ABCDE$. На меньшей дуге AE отметили точку P. Докажите, что $PA + PC + PE = PB + PD$.
5. Обобщите предыдущий пункт на случай правильного n-угольника (n — нечётное число).
6. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. На меньшей дуге AB отмечена точка P. Докажите, что $PC + PD = \left(1 + \sqrt{2}\right)(PA + PB)$.
7. В окружность вписан правильный пятиугольник $ABCDE$. На меньшей дуге AB отметили точку P. Докажите, что $PC + PE = \frac{3+\sqrt{5}}{2}(PA + PB)$.

8. В окружность вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. На меньшей дуге AB отметили точку P. Докажите, что $PC + PF = \left(1 + \sqrt{3}\right)(PA + PB)$.
9. Обобщите пункты 6–8 на случай правильного n-угольника.

10. Замечательно. Очень хорошо. Прекрасно!

Рассмотрим треугольник ABC и его биссекрисы AA', BB' и CC'. Будем называть треугольник ABC *замечательным*, если он сам не является равнобедренным, а треугольник $A'B'C'$ является и

$$A'B' = A'C'. \qquad (1)$$

1. Найдите верхнюю и нижнюю оценки на величину $\cos\angle BAC$ для замечательного треугольника ABC.
2. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ — правильный семиугольник. Докажите, что треугольник $A_1A_3A_4$ — замечательный.
3. Пусть треугольник ABC — замечательный, и $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$. Докажите, что
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}.$$
Докажите, что приведенное равенство вкупе с неравенствами треугольника
$$\begin{cases} 0 < a < b + c, \\ 0 < b < a + c, \\ 0 < c < a + b \end{cases}$$
обязательно задаёт замечательный треугольник. Существуют ли замечательные треугольники, все стороны которых выражаются целыми числами?
4. Рассеянный мальчик Миша часто путает биссектрисы с медианами (высотами). Однажды Миша решил составить свои аналоги замечательных треугольников. Может ли Миша найти неравнобедренный треугольник ABC, удовлетворяющий условию (1), если AA', BB' и CC' — медианы (высоты).
5. Поиграемся с условием (1). Пусть теперь $A'B' = kA'C'$(2). Исследуйте пункты 1–3, опираясь на условие (2) вместо условия (1). Какие теперь ограничения накладываются на $\cos\angle BAC$ и стороны a, b и c треугольника ABC? При каких k замечательный треугольник теперь можно построить на вершинах правильного n–угольника.
6. Исследуйте те же пункты с условием (2) по версии Миши, то есть в случаях, когда AA', BB' и CC' медианы или высоты. Такие треугольники будем называть, соответственно, *очень хорошими* и *прекрасными*.
7. Может ли треугольник ABC быть одновременно и очень хорошим и прекрасным? А замечательным и прекрасным? А могут ли у него быть все три качества? Здесь будут интересны случаи как с одинаковыми, так и с разными k по условию (2).
8. Обобщите задачу на случай чевиан.

11. Фишки и деньги

1. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять любые две соседние фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить все фишки в обратном порядке?
2. Тот же вопрос, если к условиям пункта 1 добавится условие того, что можно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят
А) ровно три фишки;
Б) ровно 4 фишки.
3. Ответьте на вопрос пункта 2, если фишек не 100, а а) 2021; б) n.
4. При каком минимальном количестве фишек, через которые можно менять фишки бесплатно, сумма будет минимальной, если фишек всего 100? (при этом условие платы 1 рубля за то, чтобы поменять местами соседние фишки сохраняется)
5. Ответьте на вопрос пункта 4, если фишек n.
6. Предложите свои обобщения и направления данной задачи.

Задачи предложили:

задачи №1, 2, 3, 8 — идеи взяты из разных источников, задача №4 — Левин В.Б., задача №6 — Горский С.М., задача № 5 — Гарднер М., Горский С.М, задачи №7, 11 — Струк А.Н., задача №9 – Стенли Рабинович, задача №10 – Саватеев А, Тодоров Е.