Исследовательские задания к областному турниру юных математиков

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

1. Шагреневая кожа

0. В книге Т.П.Бахтиной «Математикон» приведена задача о шагреневой коже: «Шагреневая кожа исполняет желания, но после каждого желания её площадь уменьшается: либо на 1 дм² в обычном случае, либо в 2 раза, если желание заветное. Десять желаний уменьшили площадь кожи втрое, следующие несколько – ещё всемеро, а ещё через несколько желаний кожа вообще пропала. Какова первоначальная площадь кожи?» Решите её.

1. Решите эту задачу, если кожа уменьшилась втрое не после исполнения первых 10 желаний, а после исполнения первых P желаний, где P – натуральное число. При каких P можно найти первоначальную площадь кожи? Чему она равна?

2. Решите первоначальную задачу, если следующие несколько желаний уменьшили кожу не в 7 раз, а в T раз, где T – натуральное число. При каких T можно найти первоначальную площадь кожи? Чему она равна?

3. Решите первоначальную задачу, если после исполнения первых 10 желаний кожа уменьшилась не втрое, а в K раз, где K – натуральное число. При каких K можно найти первоначальную площадь кожи? Чему она равна?

4. Предложите свои обобщения задачи.

2. Необычное сокращение

Введем новый вид сокращения рациональных дробей. Будем говорить, что дробь $\frac{\overline{mn}}{\overline{nk}}$ сокращается необычно, если $\frac{\overline{mn}}{\overline{nk}} = \frac{m}{k}$. Здесь m, n и k – натуральные числа, $\overline{mn}$ – число, получаемое из цифр чисел m и n, если к числу m справа дописать число n, аналогично определяется $\overline{nk}$. Например, дробь $\frac{1999}{9995}$ сокращается необычно, так как $\frac{1999}{9995} = \frac{1}{5}$, здесь $m = 1$, $n = 999$, $k = 5$, $\overline{mn} = 1999$, $\overline{nk} = 9995$.

1. Найти все значения натурального числа n, при котором дробь $\frac{\overline{1n}}{\overline{n5}}$ сокращается необычно.

2. Найти все значения натурального числа n, при котором дробь $\frac{\overline{1n}}{\overline{n3}}$ сокращается необычно.

3. Для цифры k найти все значения натурального числа n, при котором дробь $\frac{\overline{1n}}{\overline{nk}}$ сокращается необычно.

4. Для цифр k и m найти все значения натурального числа n, при котором дробь $\frac{\overline{mn}}{\overline{nk}}$ сокращается необычно.

5. Предложите свои обобщения задачи.

3. Характеристика таблиц

В клетках прямоугольной таблицы $m{\times}n$ расставлены знаки «+» и «–». Разрешается одновременно во всех клетках какой-то строки или столбца заменить знаки на противоположные. Это действие можно применить несколько раз, пока количество знаков «–» не станет наименьшим. Наименьшее число знаков «–», которое можно получить, начиная с данной таблицы, называется ее характеристикой. Найти все возможные характеристики для таблицы:

1. $2{\times}3$;
2. $3{\times}3$;

3. 3×4;

4. 4×4;

5. 4×5;

6. 5×5;

7. $n\times2$;

8. $n\times3$;

9. $n\times m$, где m и n – некоторые натуральные числа.

10. Предложите свои обобщения задачи.

4. Очевидные суммы

Найдите следующие суммы для а) $n = 5$, б) $n = 2022$, в) для n в общем виде.

1. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$.

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}}$.

3. $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+3}+\dfrac{1}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}+(2n+1)\sqrt{2n-1}}$.

5. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$.

6. $\dfrac{1}{3\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot11}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$.

7. $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}$, (здесь $n! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно).

8. $1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!$.

9. Предложите свои обобщения задачи.

5. Из одинаковых цифр.

1. Для каждой последовательности из n цифр, каждая из которых 0 или 1, посчитали количество кусков, состоящих из одинаковых цифр. (Например, для последовательности 00111001 таких куска четыре: 00, 111, 00, 1). Все полученные числа сложили. Какое число получилось? Решите задачу для а) $n = 5$, б) $n = 10$, в) $n = 2022$, г) для n в общем виде.

2. А если в пункте 1 последовательности состоят из n цифр, каждая из которых 0, 1 или 2.

3. Решите пункт 1, если последовательности состоят из цифр от 0 до k.

4. Попробуйте решить пункты 1–3, если складывали не количество кусков, состоящих из одинаковых цифр, а сами куски.

5. Предложите свои обобщения задачи.

6. Сколько решений?

1. Найти все пары натуральных чисел (a; b), для которых $a^b + b^a = 2022$.

2. Найти все пары натуральных чисел (a; b), для которых $a^b + b^a = n$, где n при делении на 4 дает остаток 3.

3. Найти все натуральные n такие, что уравнение $a^b + b^a = n$ имеет ровно а) одно, б) два, в) три решения в натуральных числах.

4. Предложите свои обобщения задачи.

7. Фишки на доске

Имеется прямоугольная доска $ABCD$ со сторонами $AB = 20$, $BC = 12$. Ее разбили на единичные квадраты. Задано натуральное число r. Разрешается за один ход передвинуть фишку из одного квадрата в другой, если расстояние между центрами этих квадратов равно $\sqrt{r}$. Цель передвинуть фишку из квадрата с вершиной A в квадрат с вершиной B.

1. Докажите, что если r – четное, то цель не может быть достигнута.

2. Докажите, что если r кратно трем, то цель не может быть достигнута.

3. Докажите, что если $r = 73$, то цель может быть достигнута.

4. Опишите все значения r, при которых цель может быть достигнута.

5. Предложите свои обобщения задачи.

8. Равновесные точки

Произвольную точку M, расположенную внутри n-угольника соединим с его вершинами. Если в результате получится n равновеликих треугольников, то точку M назовем *равновесной*.

1. Для каких выпуклых многоугольников найдется равновесная точка?

2. Сколько равновесных точек может быть внутри выпуклого n-угольника? Исследуйте этот ответ в зависимости от n.

3. Внутри выпуклого многоугольника взята точка O. При каком положении точки произведение расстояний от нее до прямых, содержащих стороны многоугольника, будет наибольшим?

4. А существуют ли невыпуклые n-угольники с равновесными точками? Исследуйте этот ответ в зависимости от n.

5. Предложите свои обобщения задачи.

9. Простеющие числа

Рассмотрим все натуральные числа, меньшие некоторого натурального числа n и взаимно простые с n. Например, если $n = 12$, то эти числа 1, 5, 7, 11. А если $n = 15$, то эти числа 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. В первом примере все числа простые, во втором не все. Итак, число n будем называть *простеющим*, если все натуральные числа, меньшие числа n и взаимно простые с n будут простыми.

1. Приведите примеры простеющих чисел, не равных 12.
2. Найдите все нечетные простеющие числа.
3. Найдите все простеющие числа, не кратные трем.
4. Найдите все простеющие числа, не кратные пяти.
5. Найдите все простеющие числа вида $p^2 + 1$, где p – некоторое простое число.
6. Найдите все простеющие числа.
7. Число n будем называть *полупростеющим*, если все натуральные числа, меньшие числа n и взаимно простые с n будут либо простыми, либо произведениями двух простых чисел. Любое простеющее число является и полупростеющим. Но, например, число 10 не простеющее, но полупростеющее. Попробуйте найти все полупростеющие натуральные числа.
8. Предложите свои обобщения задачи.

10. Разбиения чисел

Представление натурального числа в виде суммы натуральных слагаемых назовем *разбиением* этого числа (например, 15=7+3+3+2). Порядок слагаемых не учитывается, поэтому 3=2+1 и 3=1+2 это одно и тоже разбиение.

Через $P(N)$ обозначим число всех разбиений числа N и пусть $P_k(N)$ – число всех тех разбиений числа N, которые удовлетворяют дополнительному условию: любые два слагаемых различаются не более чем на k. Через $Q_k(N)$ обозначим число всех разбиений, для которых любые два слагаемые отличаются не более чем на k и все слагаемые нечетны.

а) Найдите $P_1(2022)$.
б) Найдите $P_1(N)$ для произвольного N.
в) Найдите $Q_1(2022)$.
г) Найдите $Q_2(2022)$.
д) Найдите $P_2(N)$ для произвольного N.
е) Найдите $P_3(N)$ для произвольного N.
ж) Предложите свои обобщения задачи.