Типичные ошибки и их оценивание на выпускных экзаменах

Струк Александр Николаевич, учитель математики
ГУО «Гимназия №51 г.Гомеля»

Требования к оформлению решения математической задачи

При оценке результатов учебной деятельности учащихся учитывается характер допущенных ошибок: существенных и несущественных.

К существенным (грубым) ошибкам относятся ошибки, свидетельствующие о том, что ученик не знает формул, не усвоил математические понятия, правила, утверждения, не умеет оперировать ими и применять к выполнению заданий и решению задач.

А именно:

а) незнание, непонимание определений основных математических понятий, формулировок теорем, формул, которые предусмотрены программой,

Требования к оформлению решения математической задачи

б) незнание сущности математических понятий, математических величин,

в) неумение решать простейшие задания,

г) неумение строить графики элементарных функций,

д) неправильное применение методов, способов, приемов решения практических заданий.

Примеры:

1) $\sqrt{x^2} = x$,

2) $x^2 \le 9$, $x \le 3$ и $x \le -3$.

3) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha$

4) $\lg (x-y) = \lg x - \lg y$

Требования к оформлению решения математической задачи

К несущественным (негрубым) ошибкам относятся ошибки, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении знаний и умений или об отсутствии знаний, не считающихся по программе основными, т.е. отдельные ошибки вычислительного характера, погрешности в формулировке вопросов, определений, математических утверждений, небрежное выполнение записей, рисунков, графиков, схем, диаграмм, таблиц, а также грамматические ошибки в написании математических терминов. Такого рода ошибки не приводят к искажению смысла задания и его выполнения и не влияют на ответ.

Требования к оформлению решения математической задачи

Например:

- неточность определений, формулировок, теорем, формул;
- недостаточное обоснование существенных утверждений решения;
- исключение без объяснения одного из корней уравнения;
- построение графика линейной функции по трем точкам;
- в окончательном ответе не избавились от иррациональности в знаменателе;
- запись ответа в виде сократимой дроби;
- небрежность и неаккуратность записей, рисунков, чертежей;
- стилистические, пунктуационные и орфографические ошибки;
- разорвана черта дроби;
- различные единичные отрезки на осях координат;
- невидимые линии в сечении и изображении фигур нарисованы сплошной линией.

Типичные ошибки (Вычисления)

1. **Ошибки при выполнении действий с обыкновенными дробями:**

а) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\neq\frac{5}{8}$, правильное решение: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}+\frac{3\cdot3}{5\cdot3}=\frac{10+9}{15}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}$

б) $3-\frac{2}{7}\neq2\frac{2}{7}$, правильное решение: $3-\frac{2}{7}=2+1-\frac{2}{7}=2+\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=2+\frac{7-2}{7}=2\frac{5}{7}$

в) $4\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}\neq2\frac{1}{6}$, правильное решение:

$$4\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=2+\frac{1\cdot2}{3\cdot2}-\frac{1\cdot3}{2\cdot3}=2+\frac{2-3}{6}=2-\frac{1}{6}=1+1-\frac{1}{6}=1\frac{5}{6}.$$

Типичные ошибки (Вычисления)

1. Часто допускаются ошибки при выполнении действий со степенями с отрицательными и дробными показателями.

Примеры

а) Вычислить значение выражения : $(2^{-1}+3^{-1})^{-1}$.

$(2^{-1}+3^{-1})^{-1} \neq (2^{-1})^{-1}+(3^{-1})^{-1}$**, так степень суммы не равна сумме степеней слагаемых.**

Для вычисления значения этого выражения выполним указанные действия по порядку, т.е.

сначала в скобках выполним возведение в степень: $2^{-1}=\frac{1}{2}$, $3^{-1}=\frac{1}{3}$,

затем – сложение: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$,

последнее действие – возведение суммы с степень $\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$.

б) Вычислить: $2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}$.

$2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}} \neq 2^{\frac{1}{4}}$**,так как при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются**

Правильное решение: $2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}=2^{1}=2$.

Типичные ошибки (Вычисления)

1. Большое число ошибок допускается при применении тождества, справедливого для любого действительного a и натурального n.

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| = \begin{cases} a, \text{если } a \ge 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

<u>Пример</u>:

Найдите значение выражения : $\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

Вначале выполняются верные преобразования:

$\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$, далее заменяя $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ на 1-$\sqrt{3}$,

получают неверное решение 1-$\sqrt{3}$+1+$\sqrt{3}$ =2.

Ошибка заключается в том, что число (1- $\sqrt{3}$) отрицательное ($\sqrt{3}$>1), а, следовательно, $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ -1.

Тогда правильное решение будет таким:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3}.$$

Типичные ошибки (Вычисления)

1. Ошибки, связанные с неверным применением формул приведения:

а) sin (3π-α) = cosα. Это неверно.

Следует помнить, что **формулы приведения применяются к тригонометрическим функциям от выражений вида ($n\frac{\pi}{2}+\alpha$) или ($n\frac{\pi}{2}-\alpha$),где n – целое число.** Поэтому аргумент, если это возможно, приводится к такому виду.

В данном случае получим: $3\pi-\alpha=6\frac{\pi}{2}-\alpha$. 6 – четное число, поэтому название функции синус не меняется: $\sin(3\pi-\alpha)=\sin\alpha$ - это верное решение.

Типичные ошибки (Вычисления)

4. Ошибки, связанные с неправильным определением промежутка, содержащего заданный угол.

а) Определить знак числа sin4.
Ответ sin4>0 - неверный, так как 4 радиана – это угол, принадлежащий третьей четверти ($4 \approx 57^\circ \cdot 4 = 228^\circ$), а в третьей четверти синус отрицательный, т.е. $\sin 4 < 0$.

б) Сравните значения выражений $\cos 34^\circ$ и $\cos 330^\circ$.
Ответ $\cos 34^\circ > \cos 330^\circ$ - неверный, так как углы 34° и 330° не принадлежат одному промежутку монотонности функции $y=\cos x$. Заменим $\cos 330^\circ$ на равное значение $\cos\alpha$ так, чтобы α принадлежал одному промежутку монотонности с углом 34°. Используя свойство периодичности косинуса, получим: $\cos 330^\circ = \cos(330^\circ - 360^\circ) = \cos 30^\circ$.
Далее $30^\circ < 34^\circ$ и оба этих угла принадлежат одному и тому же промежутку монотонности (в промежутке $[0; 90^\circ]$ косинус убывает), поэтому $\cos 34^\circ < \cos 30^\circ$, а, значит, и $\cos 34^\circ < \cos 330^\circ$.

Типичные ошибки (Преобразования)

1. Большое число ошибок допускается при расскрытии скобок, если перед скобками стоит знак «минус».

Пример:

$-(x - 2y + 3) \neq x + 2y - 3$,

правильное решение: $-(x - 2y + 3) = -x + 2y - 3$.

4. Ошибки в разложении квадратного трехчлена на множители.

Пример:

$2x^2 + 5x + 3 = (x-1)(x-1,5)$- это неверное решение.

Две типичные ошибки: нет числового множителя 2, неверно поставлены знаки в скобках.

Правильное решение: корни трехчлена -1 и -1,5.

$2x^2 + 5x + 3 = 2(x+1)(x+1,5) = (x+1)(2x+3)$.

5. Ошибки в применении формул сокращенного умножения.

Грубые ошибки:

$a^2 - b^2 \neq (a - b)^2$, $a^2 + b^2 \neq (a-b)(a+b)$,

Типичные ошибки (Преобразования)

1. **Ошибки при сокращении дробей.**

$$\frac{a^2+a}{2a} \neq \frac{a^2}{2},$$

такая ошибка - самая распространенная: «сокращение на слагаемое».

Правильное решение: $\frac{a^2+a}{2a} = \frac{\mathrm{a}(\mathrm{a}+1)}{2\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{a}(\mathrm{a}+1):\mathrm{a}}{2\mathrm{a}:\mathrm{a}} = \frac{a+1}{2}$.

Типичные ошибки (Преобразования)

2. Ошибки при сложении алгебраических дробей:

а) $\dfrac{a-4}{a^2-4}-\dfrac{2}{a-2}=\dfrac{a-4}{(a-2)(a+2)}-\dfrac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}\neq\dfrac{a-2-2a+4}{(a-2)(a+2)}$.

Распространеннная ошибка допущена при вычитании числителя второй дроби из числителя первой дроби.
Если перед дробью стоит знак «-», то следует поменять знак перед **каждым** слагаемым в числителе вычитаемого;
правильно будет так:

$$\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2}{a-2}=\frac{a-4}{(a-2)(a+2)}-\frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{a-4-2a-4}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a-8}{(a-2)(a+2)}\ .$$

Типичные ошибки (Преобразования)

<u>Примеры:</u>

1. Сокращение дроби выполнено неправильно $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} \neq x^3 - y^3$.

Допущено сразу две ошибки: отдельно сокращены соответственно уменьшаемые и вычитаемые разностей; при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели были также разделены.

Правильное решение: $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} = x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y$.

Типичные ошибки (Преобразования)

4.Известно, что $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}=3$. Найдите $\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}$.

Ответ $\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}$= -3 - неверный.

Правильное решение:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}=\frac{(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})}=\frac{-5}{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}}=3,$$

откуда получаем $\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}=\frac{-5}{3}$.

Типичные ошибки (Преобразования)

1. Грубая ошибка: $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\sin 2x-\sin 6x} \neq \dfrac{1+3}{2-6}$.

Правильное решение: $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\sin 2x-\sin 6x} = \dfrac{2\sin 2x\cos x}{-2\sin 2x\cos 4x} = -\dfrac{\cos x}{\cos 4x}$.

Типичные ошибки (Преобразования)

1. Если $n \in N$, *то* $log_a b^{2n} \neq 2n log_a b$.
Ошибка в том, что равенство $log_a b^{2n} = 2n log_a b$ справедливо только для $b > 0$.
Если $b < 0$, то $log_a b^{2n} = 2n log_a (-b)$.
Вообще говоря, справедливо равенство: $log_a b^{2n} = 2n log_a |b|$.

2. $log_2{}^2 2x \neq 1 + log_2{}^2 x$.
Правильное решение:
$log_2{}^2 2x = (log_2 2 + log_2 x)^2 = (1 + log_2 x)^2 = 1 + 2 log_2 x + log_2{}^2 x$.

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 1	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение $\sqrt{-x+1}(2-x)=0$.	числа 1 и 2 - корни	2 – посторонний корень	корень уравнения - число 1.	Неверно применяется условие равенства произведения двух множителей нулю: произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 2	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение $\frac{x-1}{x-1}=1$.	$x \in R$	x=1- не корень уравнения	$x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$	Не учтено условие существования дроби $\frac{x-1}{x-1}$

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 6	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение $(x-3)(x^2-1)=2(x-3)$	Корни:-1; 1	Потерян корень уравнения x=3	Корни уравнения: -1;1;3	Потерян корень при делении обеих частей уравнения на выражение x-3, которое обращается в ноль при x = 3, число 3 служит корнем уравнения $(x-3)(x^2+1)=2(x-3)$.

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 7	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение $\lvert x-10 \rvert \cdot (\log_2(x-3)) = 2(x-10)$	Корни: 7; 10; 3,25	Число 7- не корень	Корни уравнения: 10; 3,25.	Корень 7 был найден при условии $x > 10$ и этому условию не удовлетворяет.

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 12	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение $x^{\frac{2}{5}}=1$	Корни: 1 и -1.	x=-1- не корень	Корень уравнения: 1	Переход от данного уравнения к уравнению $\sqrt[3]{x^2}=1$ не равносилен. Корень данного уравнения =1, так как по определению степени с дробным показателем основание степени положительно, а уравнение $\sqrt[3]{x^2}=1$ имеет корени 1 и -1.

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 17	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение $\sin x \cdot \cdot tg0,5x = 0.$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	Посторонние решния $x=\pi(2k+1)$, $n \in Z$.	$x=2\pi n,$ $n \in Z$.	Неверно применяется условие равенства произведения двух множителей нулю: при $x = \pi n$ первый множитель равен нулю, а второй при этом значении переменой не определен, если n – нечетное целое число.

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 20	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение $tg3x = tg\ 5x$	$x = \pi k/2,$ $k \in Z$	Постороннее решение $x = \pi/2 + \pi k,$ $k \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$.	Не при всех х из серии $x = \pi k/2,\ k \in Z$ определены $tg3x$ и $tg5x$ (иначе – не все корни из серии $x = \pi k/2,\ k \in Z$ входят в ОДЗ переменной данного уравнения).

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 21	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение cos4x = 0,5	x=$\pm\frac{\pi}{12}+2\pi k, k\in Z$	Неверно найдено второе слагаемое	$x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z.$	Для отыскания x в левой части равенства только первое слагаемое разделили на 4.

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 24	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите уравнение $log_5(2-x) + log_5(-2-x) = 1$	$x = \pm 3$	Посторонний корень x=3	$x = -3.$	При переходе от уравнения $log_5(2-x) + log_5(-2-x) = 1$ к уравнению $log_5(2-x)(-2-x) = 1$ расширяется область определения уравнения (в данном уравнении область определения $x < -2$, а после преобразования – расширяется: $x < -2$, $x > 2$).

Типичные ошибки (Уравнения)

Задание 26	*Неверный ответ*	*Ошибка*	*Верный ответ*	*Причина ошибки*
Решите уравнение $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x+5}=7$.	x = 4, x=284	Посторонний корень x = 4	x=284.	Ошибка появилась от того, что при возведении обеих частей данного уравнения в квадрат получилось уравнение – следствие, не все корни которого являются корнями данного уравнения.

Типичные ошибки (Уравнения)

B8	Найдите произведение корней (корень, если он единственный) уравнения $\sqrt[4]{x^2+4x-21}\cdot\sqrt[5]{x^2-4x-21}=0$.

Ошибка в отсутствии проверки корней уравнения приводит к таким ошибкам на ЦТ.

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 1	*Неверный ответ*	*Ошибка*	*Верный ответ*	*Причина ошибки*
а)Решите неравенство -3x >-6. б)Решите неравенство -8x < 4	а)(2;+∞) б) (-2;+∞)	неверно определен промежуток изменения переменной	а)(-∞; 2). б)(-0,5;+∞).	а)При делении обеих частей неравенства на отрицательное число -3 знак неравенства не был изменен. б) Для решения этого неравенства надо обе его части разделить на -8 и изменить знак неравенства

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 2	*Неверный ответ*	*Ошибка*	*Верный ответ*	*Причина ошибки*
Решите неравенство $\frac{1}{x} > 1$.	(-∞;1)	неверно определен промежуток изменения переменной	(0; 1).	Ошибка в том, что обе части данного неравенства умножили на x, без учета его знака (число x может быть как положительным, так и отрицательным

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 3	*Неверный ответ*	*Ошибка*	*Верный ответ*	*Причина ошибки*
Решите неравенство $x^2(x-1)(x-3) > 0$.	$(0;1)\cup(3;+\infty)$	Пропущены решения: $(-\infty;0]$.	$(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.	Ошибка в том, при решении неравенства методом интервалов не учтено, что при переходе через точку $x = 0$ знак функции $y = x^2(x-1)(x+3)$ не меняется .

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 5	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите неравенство $\frac{(x-5)^2}{(1-x)(3+x)} < 0$.	(-∞; -3) U(1;+∞)	Число 5 из интервала (1;+∞) не является решением.	(-∞; -3)U (1; 5) U (5;+∞).	При решении этого неравенства методом интервалов из множества решений не исключено число 5, при этом значении x неравенство обращается в равенство.

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 7	*Неверный ответ*	*Ошибка*	*Верный ответ*	*Причина ошибки*
Решите неравенство $(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2} \geq 0$.	$[2;+\infty)$	Потеряно решение x =1	$[2;+\infty)$ и x =1.	Ошибка заключается в том, что при решени этого неравенства методом интервалов пропущена точка x =1, в которой значение функции, стоящей в левой части неравенства равно нулю, при этом знак второго множителя не имеет значения.

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 8	*Неверный ответ*	*Ошибка*	*Верный ответ*	*Причина ошибки*
Решите неравенство $0{,}2^{x-3} > 1$.	$(3; +\infty)$	Не изменен знак неравенства	$(-\infty; 3)$.	Ошибка в том, что показательная функция $y = 0{,}2^x$ – убывающая, поэтому при переходе от значений функции к значениям аргумента знак неравенства изменяется

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 11	*Неверный ответ*	*Ошибка*	*Верный ответ*	*Причина ошибки*
Решите неравенство $\log_2 x < 3$	$(-\infty;8)$	Не учтена область определения логарифмической функции	$(0;8)$	Не учтена область определения логарифмической функции $y = \log_2 x$, $D(\log_2 x) = (0; +\infty)$, решение данного неравенства – пересечение промежутков $(-\infty;8)$ и $(0; +\infty)$.

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 14	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите неравенство sin x >0,5.	$x > (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$ $k \in Z$	неверно определен промежуток изменения для x	$(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;$ $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n),$ $n \in Z$	Решение тригонометрических неравенств не аналогично решению линейных неравенств (3x =6, x=2. 3x >6, x > 2).

Типичные ошибки (Неравенства)

Задание 20	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Решите неравенство : $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}>0$	$x \in R$	Не при всех $x \in R$ определены подкоренные выражения	[1;3]	При решении не учтена область определения арифметического корня.

Типичные ошибки (Функции)

Задание 1	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Найдите множество значений функции у = sinx +cosx	E= [-2;2].	Значений 2 и -2 функция не достигает	$E = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$	Ошибка в том, что значения 1 и -1 синус и косинус достигают при различных значениях аргумента.

Типичные ошибки (Функции)

Задание 3	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Найдите область определения функции: у = $\sqrt{\lg \sin x}$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$	При х из указанного промежутка (например, при х = π, 2 π) функция не определена	x=$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	Неверно решено неравенство lg sinx ≥ 0.

Типичные ошибки (Функции)

Задание 4	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
Найдите множество значений функции: $y = x^2 + x + 1$	$(0;+\infty)$	Не все значения y из этого промежутка принадлежат множеству значений данной функци (например, $y \neq 0{,}1$ ни при	$[0{,}75; +\infty)$.	Трехчлен $x^2 + x + 1$ имеет отрицательный дискриминант, и это значит, что трехчлен принимает положительные значения, но не все, а начиная с
		каком x).		ординаты вершины параболы $y = x^2 + x + 1$.

Типичные ошибки (Функции)

Задание8	*Неверный ответ*	*Ошибка*	*Верный ответ*	*Причина ошибки*
Исследуйте функцию f(x) = $\log_3(\sqrt{16x^2+9}-4x)$ -1 на четность и нечетность	Функция не является ни четной, ни нечетной	Внешний вид формулы не всегда дает очевидный ответ.	Функция является нечетной.	Не выполнены тождественные преобразования

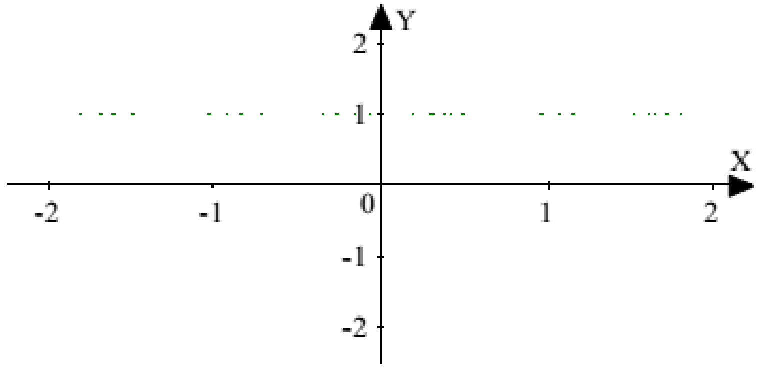
Типичные ошибки (Функции)

Задание 9	***Неверный ответ***	***Ошибка***	***Верный ответ***	***Причина ошибки***
а) Найдите производную функции y = sin(2x-5)	cos(2x-5)	Не найдена производная функции y =2x-5	2cos(2x-5).	К сложной функции y=sin(2x - 5) применено правило дифференцирования не сложной функции, а функции y = sinx

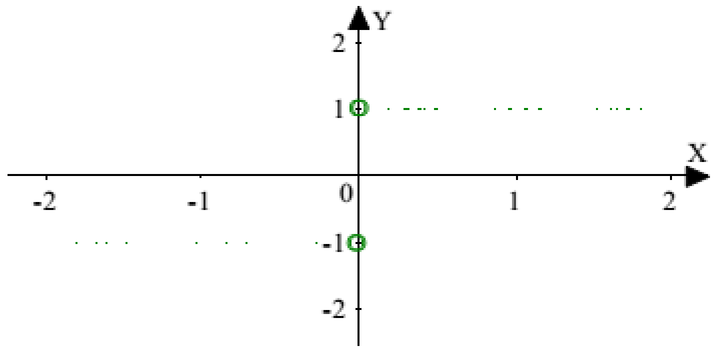
Типичные ошибки (Функции)

12. Постройте график функции $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

Неверный ответ:



Правильный ответ: $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, если x > 0 \\ -1, если x < 0 \end{cases}$



Типичные ошибки (Логические ошибки)

Задача 4

Доказать, что функция $y = \cos x + \sin(\sqrt{2}\,x)$ не периодическая.

Приводится решение.

Функция $y = \cos x$ имеет период $T_1 = 2\pi$, а функция $y = \sin(\sqrt{2}\,x)$ имеет период $T_2 = 2\pi/\sqrt{2} = \sqrt{2}\,\pi$. Тогда $2\pi n$ – периоды функции $y = \cos x$, а $\sqrt{2}\,\pi k$- период функции $y = \sin(\sqrt{2}\,x)$ (n, k – целые, отличные от нуля). Тогда для существования периода данной функции необходимо выполнение условия $\sqrt{2}\,\pi k = 2\pi n$, откуда $\sqrt{2} = 2n/k$. Получили противоречие, которое доказывает, что данная функция не имеет периода.

Логическая ошибка:

показано, что среди чисел такого вида, как $2\pi n$ и $\sqrt{2}\,\pi k$
нет периода данной функции, однако, это еще не значит, что нет никакого периода вообще.
Пример:
каждая из функций $y = 1 - \sin x$ и $y = 1 + \sin x$ имеет период 2π, а сумма этих функций имеет периодом любое действительное число.

Типичные ошибки (Логические ошибки)

Задача 6

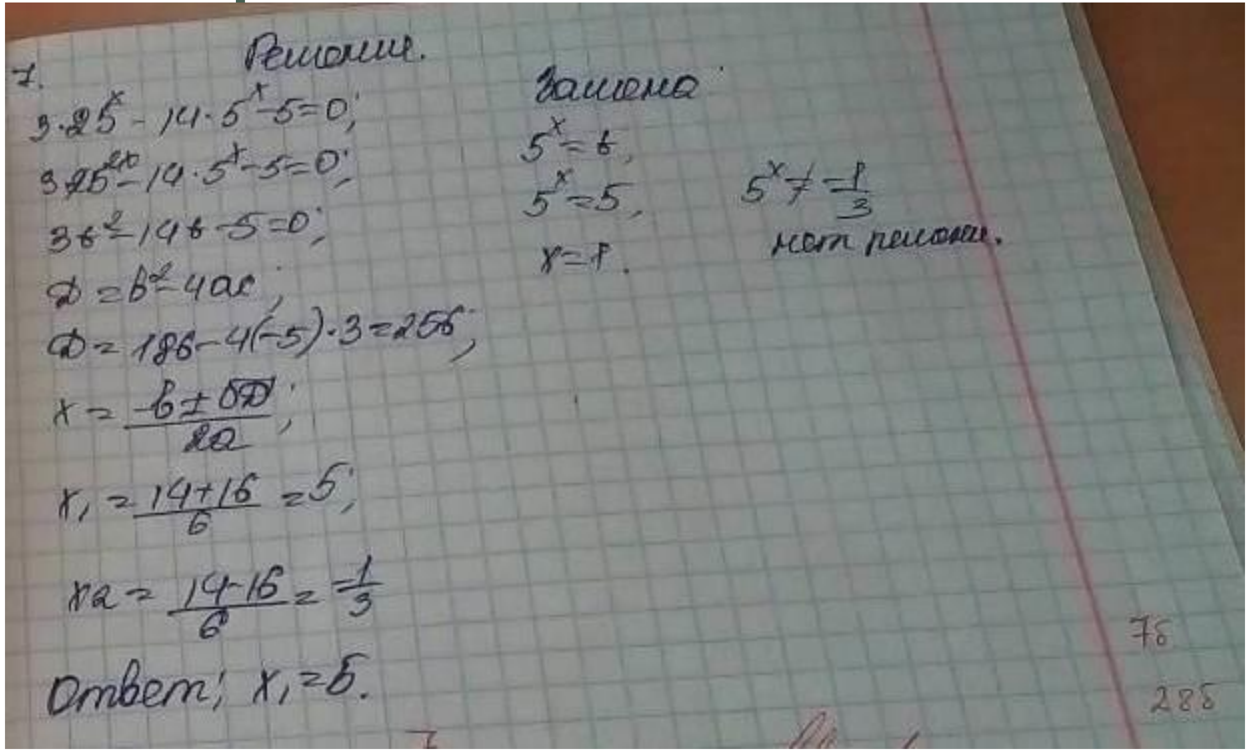
Решить систему уравнений: $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \end{cases}$

Ответ: $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\right); \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n, n \in Z\right)$ - неверный.

Логическая ошибка в том, что произвольные целые числа в ответе везде обозначаются одной и той же буквой, от этого многие решения потеряны.

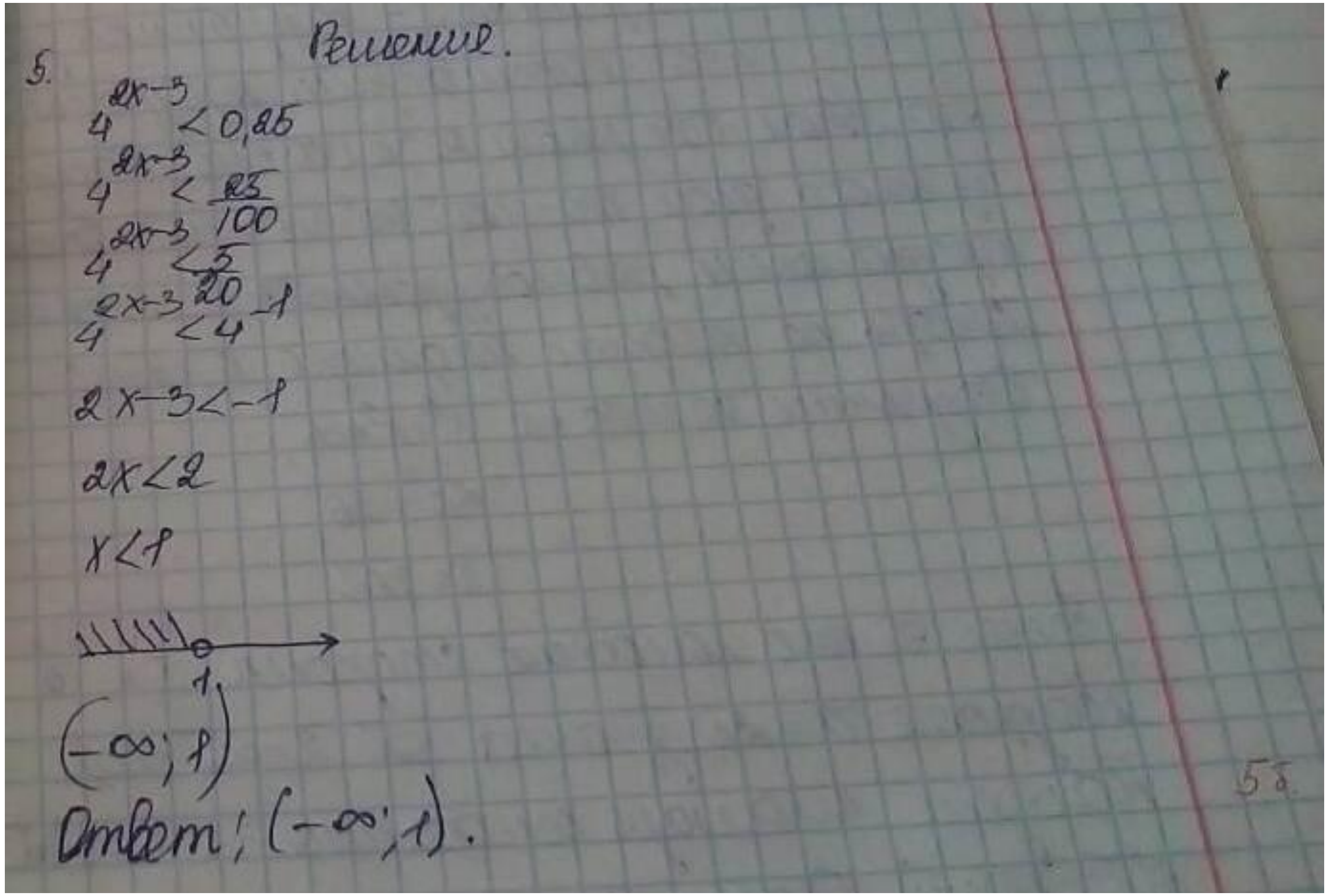
Например, при n = 0 значению x = 0 соответствует только y = π/2. Однако, при x=0 значения y = π/2+ 2πk, где k – целое тоже удовлетворяют данной сиистеме.

Образцы выполнения работ



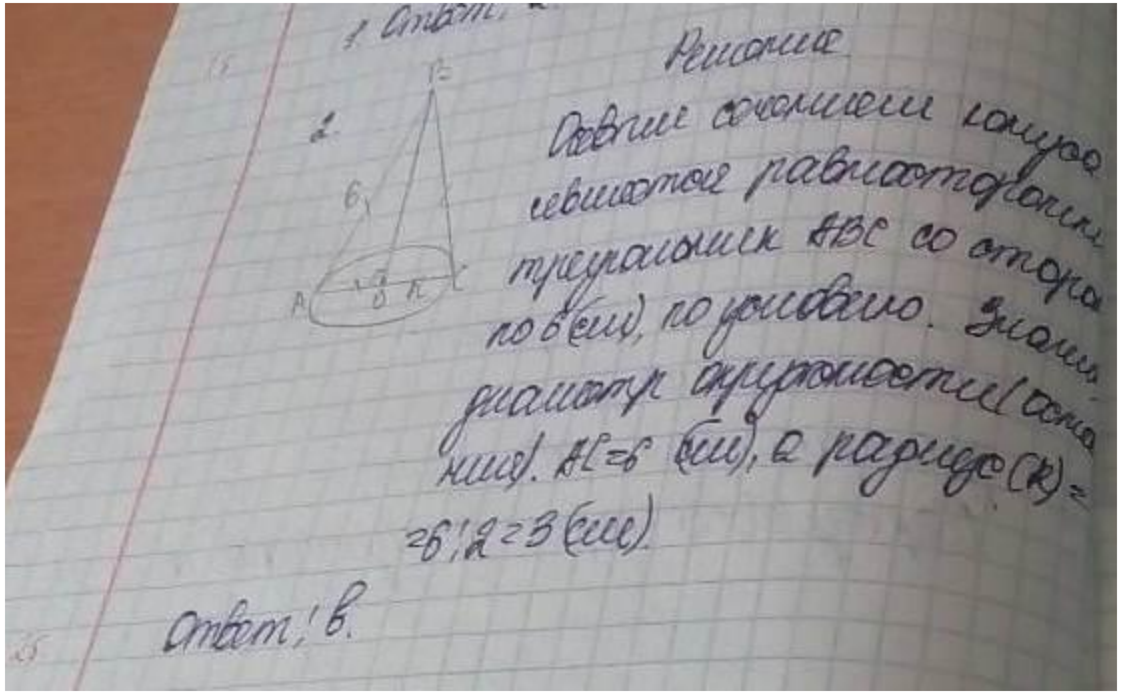
При решении данного уравнения введена замена переменной. При этом, в решении уравнения после замены учащийся находит x, а не t. Задание оценено полным баллом.

Образцы выполнения работ



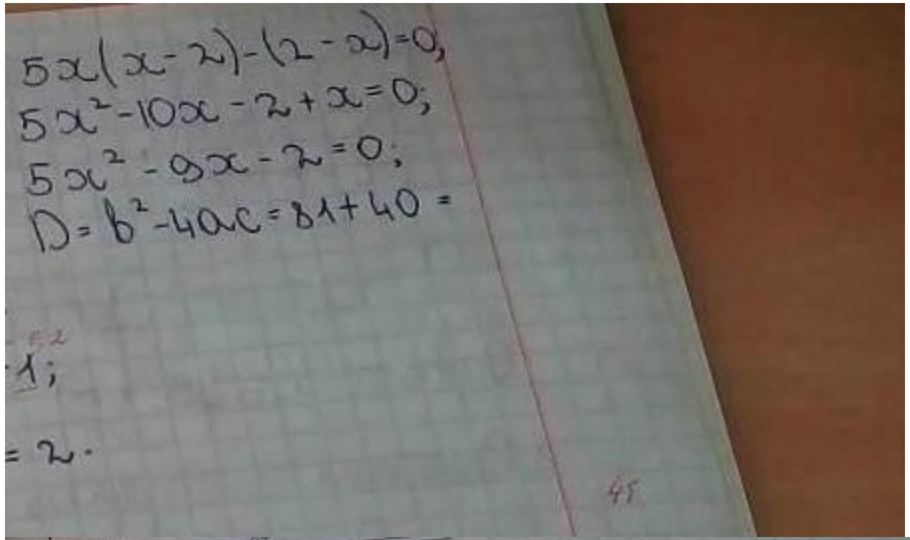
При решении задания не пояснен переход от исходного неравенства к сравнению показателей степеней (что является важным).

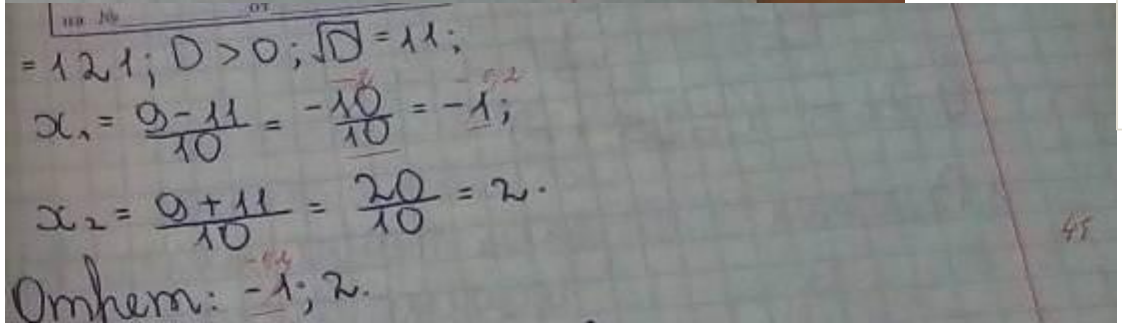
Образцы выполнения работ



В решении приведен чертеж конуса, не содержащий невидимых линий.

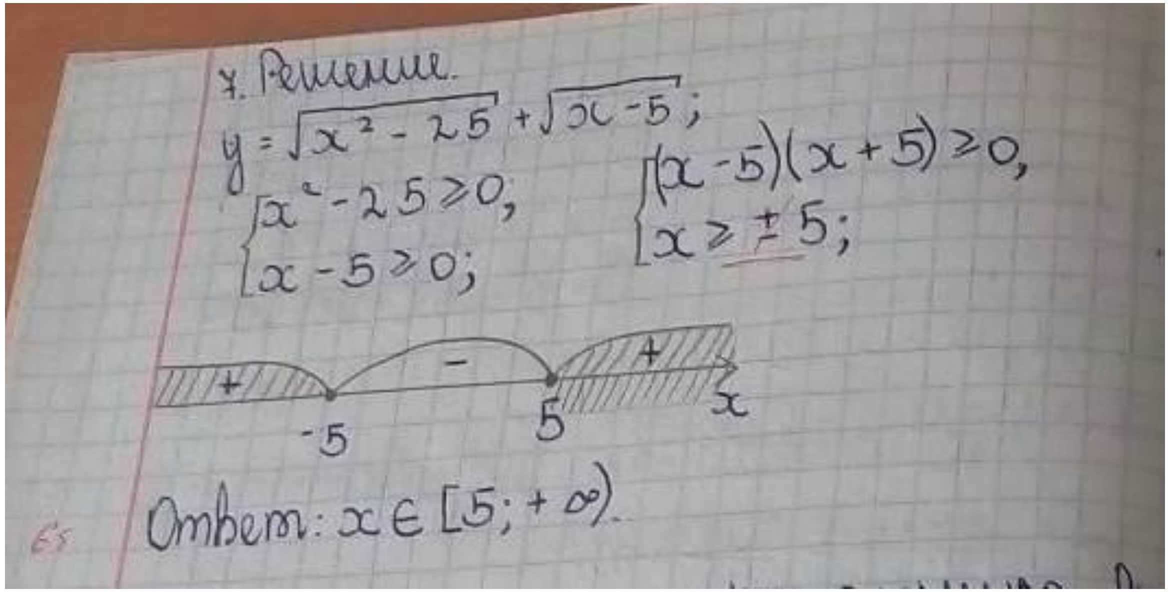
Образцы выполнения работ





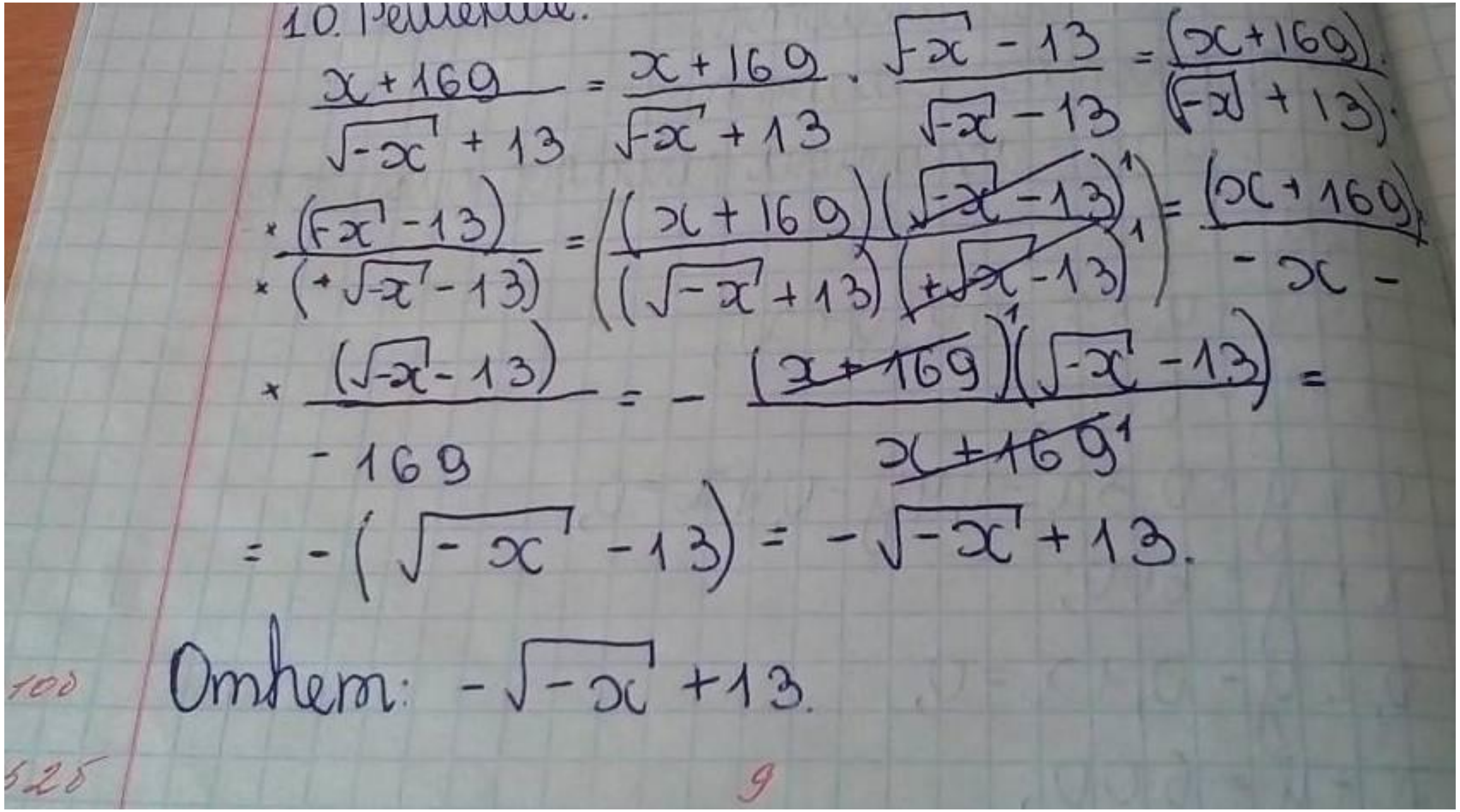
Решая квадратное уравнение, учащийся допускает ошибку при нахождении второго корня. На полях – 4 балла (задание №5). Хотя, «решить уравнение – значит, найти **все** его корни или доказать, что их нет».

Образцы выполнения работ



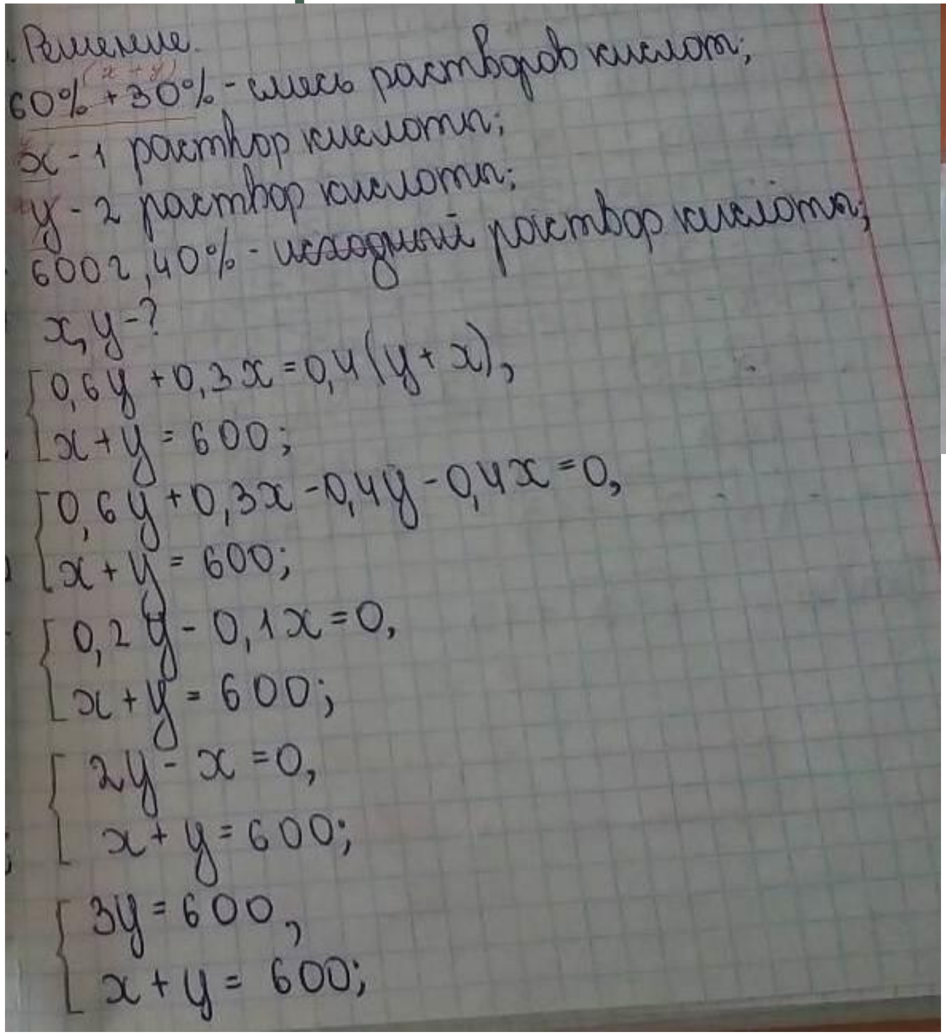
Грубая ошибка при решении второго (линейного) неравенства. Нет описания метода интервалов.

Образцы выполнения работ



Во второй строке решения дополнительные множители для числителя и знаменателя сокращаются (что видно из решения). Затем, дробь разрывается и получается новая дробь, которая при таком преобразовании не может получиться.

Образцы выполнения работ



Решение.

60% + 30% $(x+y)$ - смесь растворов кислот;

x - 1 раствор кислоты;

y - 2 раствор кислоты;

600 г, 40% - исходный раствор кислоты;

x, y - ?

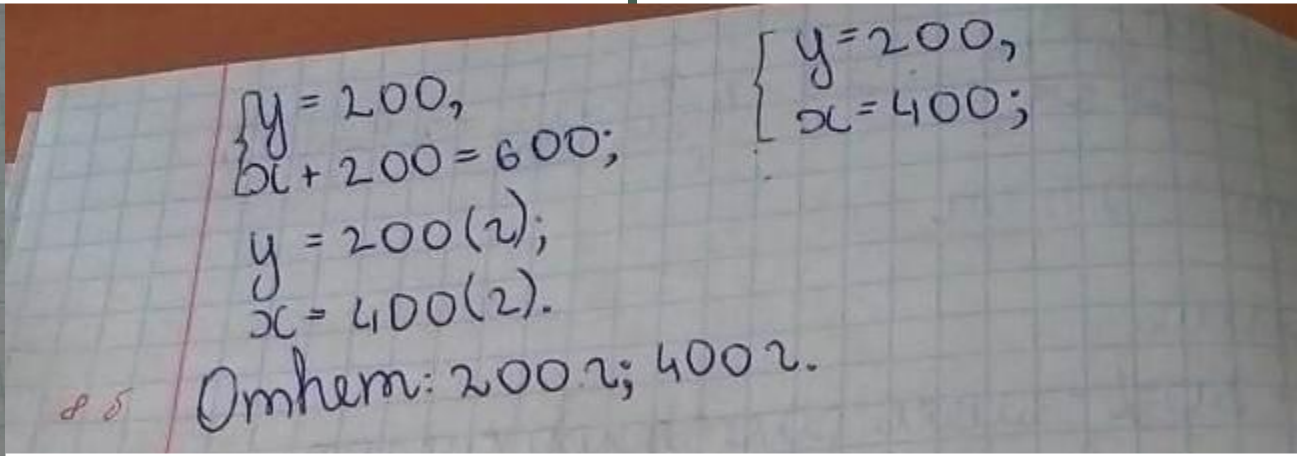
$$\begin{cases} 0{,}6y + 0{,}3x = 0{,}4(y + x), \\ x + y = 600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}6y + 0{,}3x - 0{,}4y - 0{,}4x = 0, \\ x + y = 600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}2y - 0{,}1x = 0, \\ x + y = 600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - x = 0, \\ x + y = 600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 600, \\ x + y = 600; \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 200, \\ x + 200 = 600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 200, \\ x = 400; \end{cases}$$

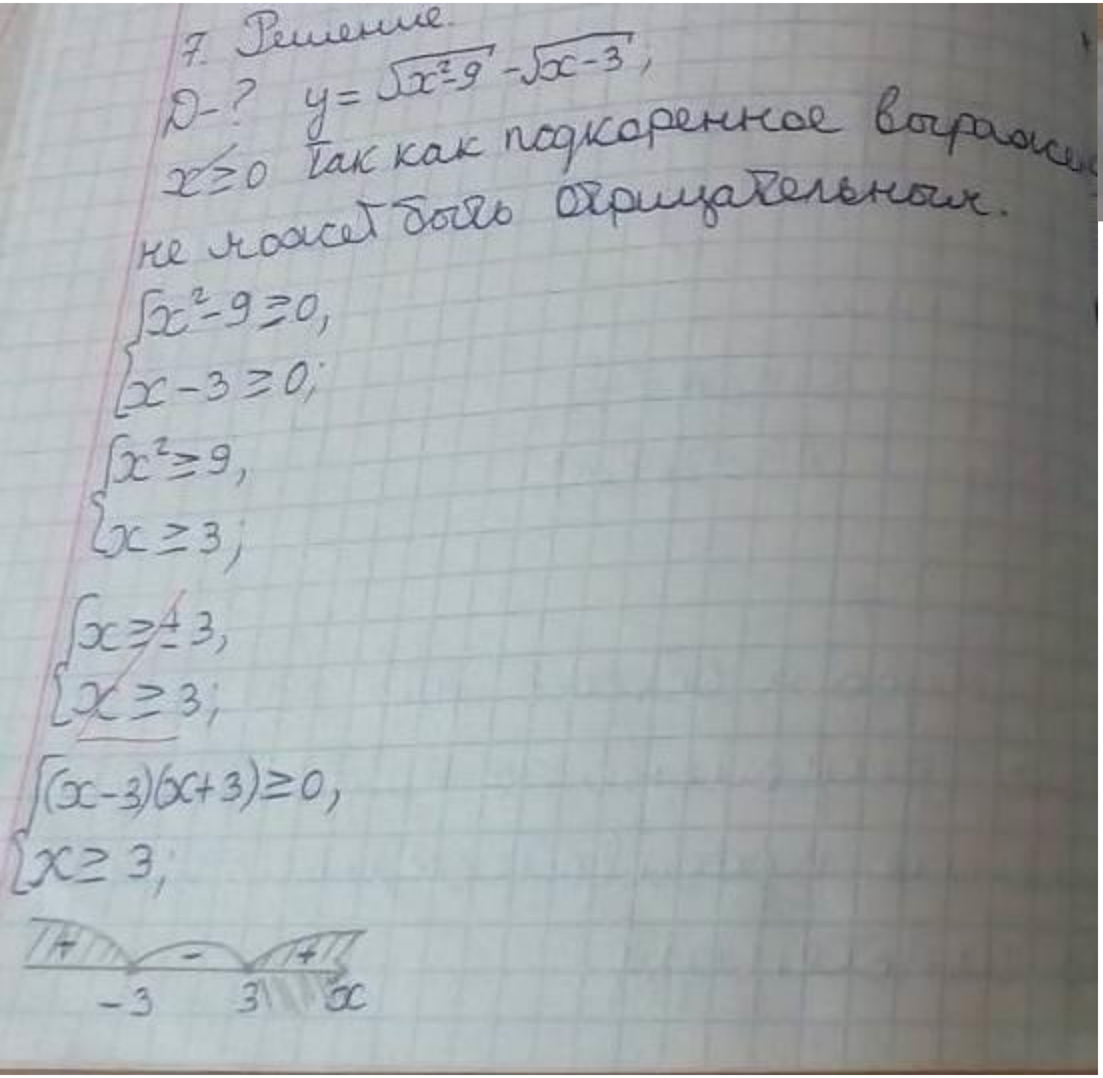
$y = 200$(г);

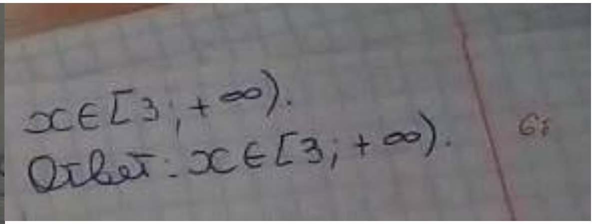
$x = 400$(г).

Ответ: 200 г; 400 г.

Система уравнений введена некорректно.

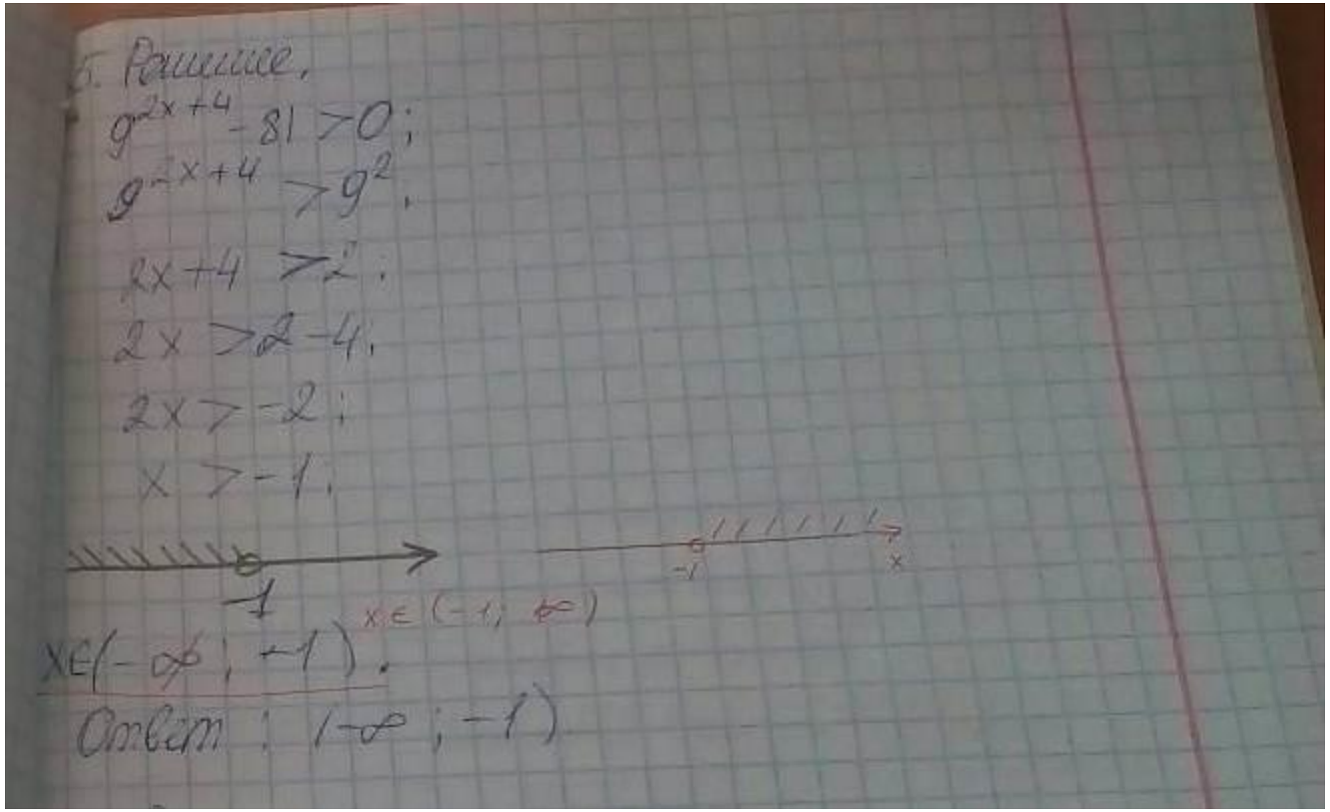
Образцы выполнения работ





Грубая ошибка при решении квадратного неравенства. При таком решении ответ должен быть другой.

Образцы выполнения работ



Отсутствуют баллы за задание на полях. Даже, если это 0, он должен быть написан.

Описание метода интервалов (9 класс)

Описание (мой вариант):

1. Вводим функцию.
2. Находим область определения и нули функции.
3. Определяем промежутки знакопостоянства функции и решения неравенства.

Примеры оформления заданий

- Вариант 62

1. Выберите верное равенство:

а) $\frac{m}{k}-\frac{n}{k}=\frac{m-n}{2k}$; б) $\frac{m}{k}-\frac{n}{k}=\frac{m-n}{k}$;

в) $\frac{m}{k}-\frac{n}{k}=\frac{mn}{k}$; г) $\frac{m}{k}-\frac{n}{k}=\frac{mn}{k^2}$.

Ответ: б) $\frac{m}{k}-\frac{n}{k}=\frac{m-n}{k}$

Примеры оформления заданий

2. Выберите верное утверждение:

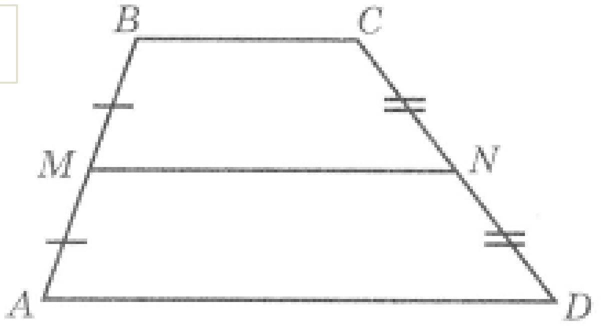
а) $\sqrt{19} \in Z$; б) $\sqrt{19} \in Q$; в) $\sqrt{19} \in I$; г) $\sqrt{19} \in N$.

Ответ: в) $\sqrt{19} \in I$

Примеры оформления заданий

3. На рисунке отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$. Найдите основание BC, если $AD = 18$ см, $MN = 12$ см.

Решение.



Пусть BC и AD – основания трапеции ABCD.

По свойству средней линии $MN = \frac{BC+AD}{2}$.

Значит, $BC = 2MN - AD = 24 - 18 = 6$ (см)

Ответ: 6 см.

Примеры оформления заданий

4. Решите совокупность линейных неравенств $\left[\begin{array}{l} x < 5, \\ x - 7 \leq 0. \end{array}\right.$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} x < 5, \\ x - 7 \leq 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x < 5, \\ x \leq 7. \end{array}\right.$$

Нанесем решение данной совокупности на координатную прямую и получим, что

$$x \in (-\infty; 7].$$

Ответ: $(-\infty; 7]$

Примеры оформления заданий

5. Найдите значение выражения $\left(27^3 \cdot 3^{-8}\right)^{-1}$.

Решение.

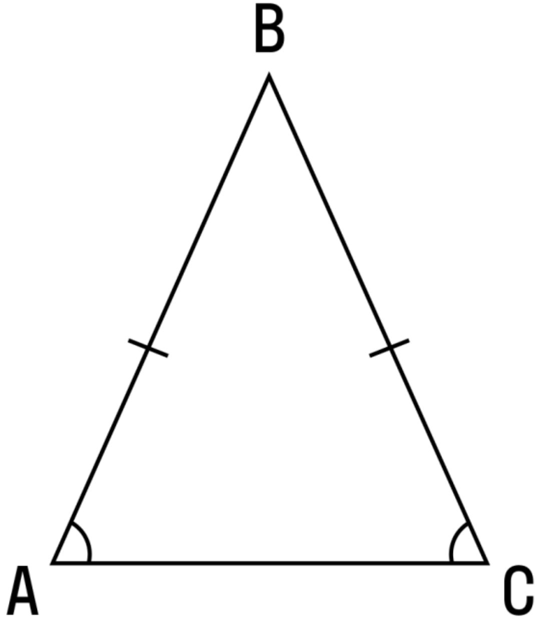
$(27^3 \cdot 3^{-8})^{-1}=((3^3)^3 \cdot 3^{-8})^{-1} = (3^9 \cdot 3^{-8})^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$

Замечание! *Поскольку нужно найти «значение выражения» – т.е. число, то ответ* 3^{-1} *не является верным, т.к. это запись числового выражения.*

Примеры оформления заданий

6. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 13 см, а основание равно 10 см.



Решение.

Пусть AC – основание треугольника ABC, AB, BC – боковые стороны.

Полупериметр треугольника равен $p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{13+13+10}{2} = 18$ (см)

По формуле Герона

$S = \sqrt{p(p-\mathrm{AB})(p-\mathrm{BC})(p-\mathrm{AC})} =$

$= \sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)} = \sqrt{18 \cdot 25 \cdot 8} = 60$ (см^2)

Ответ: 60 см^2.

Примеры оформления заданий

7. Решите уравнение $\frac{x-1}{x+3}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{2x+18}{x^2-9}$.

Решение.

Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} x+3\neq 0, \\ x-3\neq 0, \\ x^2-9\neq 0. \end{cases}$$

Значит, $x\neq \pm 3$.

$$\frac{x-1}{x+3}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{2x+18}{x^2-9}$$

$$\frac{(x-1)(x-3)+(x+1)(x+3)}{x^2-9}=\frac{2x+18}{x^2-9}$$

$$\frac{x^2-4x+3+x^2+4x+3}{x^2-9}=\frac{2x+18}{x^2-9}$$

$$2x^2+6=2x+18$$

$$x^2-x-6=0$$

Примеры оформления заданий

По теореме, обратной теореме Виета,

$x_1 = -2, x_2 = 3$ – не подходит по области определения уравнения.

Ответ: -2.

Примеры оформления заданий

8. Докажите, что функция $f(x)=3x^4-5x^2$ является четной.

Решение.
$D(f)=R$, т. к. функция – многочлен.
$f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2=3x^4-5x^2=f(x)$. Значит, функция четная.
Доказано.

Примеры оформления заданий

9. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если это же двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 5. Найдите это двузначное число.

Решение.

Пусть число имеет вид $\overline{ab} = 10a + b$.

Тогда, по условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} 10a + b = 4(a + b) + 3, \\ 10a + b = 3ab + 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a - 3 = 3b, \\ 10a + b = 3ab + 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 1 = b, \\ 10a + 2a - 1 = 3a(2a - 1) + 5. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы

Примеры оформления заданий

$6a^2 - 15a + 6 = 0,$

$a^2 - 2{,}5a + 1 = 0.$

По теореме, обратной теореме Виета,

$a_1 = 2, \qquad a_2 = 0{,}5$ – не подходит, так как a – цифра.

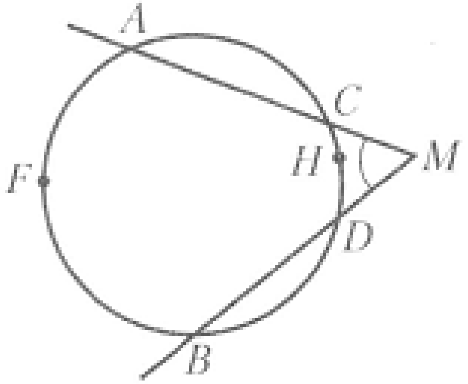
$b = 2a - 1 = 4 - 1 = 3.$

Значит, искомое число 23.

Ответ: 23.

Примеры оформления заданий

10. К окружности из точки M проведены две секущие MA и MB, которые пересекают окружность в точках A и C, B и D, как указано на рисунке. Докажите, что $\angle AMB = \frac{1}{2}(\cup AFB - \cup CHD)$.



Решение.
Рассмотрим треугольник BCD.
$\angle CBD = \frac{1}{2}\cup CHD$, как вписанный, опирающийся на эту дугу. Аналогично, $\angle ACB = \frac{1}{2}\cup AFB$.
$\angle ACB = \angle AMB + \angle CBD$ – внешний для треугольника BCM.
Значит, $\angle AMB = \angle ACB - \angle CBD = \frac{1}{2}\cup AFB - \frac{1}{2}\cup CHD = \frac{1}{2}(\cup AFB - \cup CHD)$. Доказано.

При подготовке презентации использована книга Пирютко О.Н. «Ошибки на экзаменах по математике»

Спасибо за внимание!