Исследовательские задания к областному турниру юных математиков

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

Задача 1. Хорошие числа.

На доске записано натуральное число A. Алиса каждую минуту преобразует записанное на доске число по следующим правилам: если в нем есть одинаковые цифры, то она стирает одну из них, а если все цифры числа различны, то она стирает это число и взамен записывает его, умноженное на 3, то есть вместо A на доске появляется число $3A$. Например, если записано число $A = 470$, то через две минуты Алиса может получить либо $470\to1410\to410$, либо $470\to1410\to140$. Если через несколько минут Алиса из исходного числа A сможет получить опять число A, то число A называется хорошим.

1. Существуют ли хорошие однозначные числа?

2. Существуют ли хорошие двузначные числа?

3. Существуют ли хорошие трехзначные числа?

4. Опишите все хорошие числа, меньшие 100.

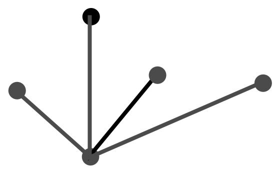
5. Попробуйте описать все хорошие числа.

6. Ответьте на вопросы пунктов 1–5, если Алиса вместо умножения на 3 умножает на 7.

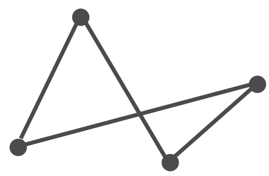
7. Предложите и решите свои обобщения этой задачи.

Задача 2. Разрушители звёзд

Пусть n, k, m – натуральные числа и $n \geq k \geq 2$, $n \geq m \geq 3$. На плоскости нарисовано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединены ровно одним отрезком. Назовем ***k*-звездой** конструкцию из k точек и $k-1$ отрезков, в которой одна из точек соединена отрезками со всеми остальными. Назовем ***m*-угольником** конструкцию из m точек и m отрезков, последовательно соединяющих эти точки (последняя точка соединена с первой, отрезки могут пересекаться).



5-звезда



4-угольник

1. Таня и Дима по очереди (начинает Таня) стирают ровно по одному отрезку, соединяющему две из данных n точек. Проигрывает тот из игроков, после хода которого не останется ни одной k-звезды. Выясните, кто победит при правильной игре, если
   1.1. $k = 2, n \geq 2$;
   1.2. $k = 3, n = 2026$;
   1.3. n, k – произвольные натуральные числа, $n \geq k$;
   1.4. как изменится ответ в задаче, если проигравшим считается тот из игроков, после хода которого останется менее двух k-звёзд?

2. Исследуйте задачу 1 при условии, что k-звезда заменена на m-угольник.

3. Исследуйте задачу 1 для каких-либо других конструкций.

4. Внесем в игру элемент экстрима. Проигравшим считается тот из игроков (по-прежнему начинает Таня), после хода которого не останется ни одной k-звезды и ни одного m-угольника. Найдите выигрышную стратегию победителя этой игры, если
   4.1. $k = 3, m = 3, n$ – произвольные натуральные числа, $n \geq 3$;
   4.2. $k = 4, m = 3, n$ – произвольные натуральные числа, $n \geq 4$;
   4.3. $m = 3, k, n$ – произвольные натуральные числа $n \geq k \geq 3$;
   4.4. Найдите другие бесконечные серии троек (n, k, m) при $m > 3$, для которых можно определить победителя при правильной игре.

5. Предложите свои обобщения и вариации этой задачи и исследуйте их.

Задача 3. Маршрут перестроен

Используем стандартное обозначение биномиального коэффициента: C_n^k – число сочетаний из n по k, $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Дана бесконечная прямоугольная таблица с левым нижним углом в $(0,0)$, клетки которой нумеруются как $(i,\ j)$, где $i,\ j$ – целые неотрицательные числа. Разрешается за 1 ход перейти либо на клетку выше, либо на клетку правее. Формально, за 1 ход из клетки $(i,\ j)$ можно попасть либо в $(i+1,\ j)$, либо в $(i,\ j+1)$. Рассмотрим пути по клеткам, ведущие из одной клетки в другую. Два пути считаются различными, если найдётся клетка, которая есть в одном пути, но нет во втором.

1. Докажите, что различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (n,m) ровно C_{n+m}^n.

2. Сколько существует различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (n,m), не проходящих через клетку (a,b)?

3. Сколько существует различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (n,m), не проходящих через клетки (a,b) и (c,d)?

4. Сколько существует различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (n,n), не проходящих через клетки $(i,\ j)$, для которых выполняется $|i-j|>k$? **a)** $k=1$; **b)** $k=2$; **c)** k – произвольное натуральное число.

5. Сколько существует различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (n,n), не проходящих через клетки $(i,\ j)$ такие, что $j>i$?

6. Сколько существует различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (n,n), не проходящих через клетки $(i,\ j)$ такие, что $j>i$, а также через клетку (a,b)?

7. Сколько существует различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (n,n), не проходящих через клетки (i,j) такие, что $j>i$, а также через клетки (a,b) и (c,d)?

8. Найдите сумму количеств различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (i,j) по всем $i \in [0,n], j \in [0,m]$.

9. Сколько существует различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку $(13,13)$, не проходящих через клетки (i,j) такие, что $i \le 7$ *и* $j \ge 5$?

10. Докажите, используя пункт 1, что:

$$\sum_{i=c-b}^{a} C_a^i \cdot C_b^{c-i} = C_{a+b}^c$$

где a, b, c – неотрицательные целые, $c \le a+b$, $c \ge a$ и $c \ge b$.

11. Докажите, используя пункт 1, что:

$$\sum_{i=a}^{c-b} C_i^a \cdot C_{c-i}^b = C_{c+1}^{a+b+1}$$

где a, b, c – неотрицательные целые, $c \ge a+b$.

12. Пусть теперь из клетки $(i,\ j)$ нам разрешены лишь ходы в клетку $(i+2, j+1)$ и в клетку $(i+1, j+2)$. Сколько существует различных путей из клетки $(0,0)$ в клетку (n,m)?

13. Предложите свои обобщения к данной задаче и исследуйте их.

Задача 4. Различные наименьшие делители

1. Даны два различных наименьших натуральных делителя a и b натурального числа n, для которых верно равенство $a^2 + b^2 + 111 = n$. **(1)**

Найти все значения n, при которых это возможно.

2. Решить пункт 1 в общем виде, то есть вместо равенства (1) будет верно равенство $a^2 + b^2 + A = n$. **(2)**

Ответ в пункте 2 дать в зависимости от значения натурального числа A.

3. Обобщим задачу на случай трех делителей. Даны три различных наименьших натуральных делителя a, b и c натурального числа n, для которых верно равенство $a^2 + b^2 + c^2 + 380 = n$. **(3)**

Найти все значения n, при которых это возможно.

4. Решить пункт 3 в общем виде, то есть вместо равенства (3) будет верно равенство $a^2 + b^2 + c^2 + A = n$. **(4)**

Ответ в пункте 4 дать в зависимости от значения натурального числа A.

5. Даны четыре различных наименьших натуральных делителя a, b, c и d натурального числа n, для которых верно равенство

а) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 100 = n$, **(5)**
б) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 655 = n$, **(6)**
в) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2026 = n$, **(7)**
г) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A = n$. **(8)**

Найти все значения n, при которых это возможно. Ответ в подпункте 5.г) дать в зависимости от значения натурального числа A.

6. Предложите свои идеи развития и обобщения этой задачи. Исследуйте их и приведите решение.

Задача 5. Лжецы слева

0. *Исходная постановка.* Действие происходит на острове рыцарей и лжецов. Там живут только лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Однажды 80 жителей острова собралось за круглым столом. И каждый из 80 аборигенов, сидящих за столом, заявил: «Среди троих человек, сидящих слева от меня, ровно один лжец». Сколько лжецов могло быть за столом?

1. Решите пункт 0, если заменить высказывания аборигенов следующим:

а) «Среди троих человек, сидящих слева от меня, хотя бы один лжец»,

б) «Среди троих человек, сидящих слева от меня, хотя бы два лжеца»,

в) «Среди троих человек, сидящих слева от меня, ровно два лжеца»,

г) «Все трое человек, сидящих слева от меня, лжецы».

2. Рассмотрите аналог пунктов 0 и 1, но утверждение касается не трех человек, сидящих слева от говорящего, а четырех. Решите аналогичные задачи, если было заявлено, что среди них **а)** ровно один, **б)** не менее, чем один, **в)** не менее, чем два, **г)** не менее чем три, **д)** ровно два, **е)** ровно три, **ж)** четыре лжеца.

3. Рассмотрите аналог пунктов 0–2, но утверждение касается уже пяти человек, сидящих слева от говорящего.

4. Рассмотрите аналог предыдущих пунктов, но утверждение касается уже одиннадцати человек, сидящих слева от говорящего.

5. Исследуйте задачу, если утверждение касается k человек, сидящих слева от говорящего.

6. Исследуйте задачу, если за столом собралось n человек, где n – некоторое натуральное число. Как изменятся ответы в первых пяти пунктах в зависимости от n? Интерес представляет даже частные случаи.

7. Предложите свои идеи развития и обобщения этой задачи. Исследуйте их и приведите решение.

Задача 6. Сквозные множества

Волшебник из-за своей заурядности заточил незаурядного мальчика Сашу в черно-белое множество точек на плоскости. Выходом из него служит любой прямоугольный треугольник с вершинами из этого множества, имеющими один цвет. Если при любой раскраске Саша сможет найти выход, то такое множество назовем сквозным.

1. Являются ли сквозными следующие множества:
- **a)** окружность;
- **b)** эллипс;
- **c)** граница равностороннего треугольника;
- **d)** граница правильного n-угольника;
- **e)** парабола.

2. Опишите действительные функции $f(x)$, заданные на конечном или бесконечном интервале, чьи графики являются / не являются сквозными множествами.

3. Попробуйте классифицировать все сквозные множества.

4. Мальчик сказал, что волшебник банален. Тот обиделся и решил поменять условие выхода. Исследуйте вопросы, аналогичные 1)–3), заменив прямоугольные треугольники в условии на:
- **a)** равносторонние треугольники;
- **b)** равнобедренные треугольники;
- **c)** квадраты.

5. Попробуйте описать фигуры, для которых существуют/не существуют соответствующие сквозные множества.

6. Предложите свои обобщения.

Задача 7. О сумме цифр полиномов

Пусть $P(x)$ – некоторый многочлен с натуральными коэффициентами. Для каждого натурального числа определим число $S(P(n))$, где $S(m)$ – сумма цифр в десятичной записи числа m.

0. Пусть $P(x) = ax + b$ – многочлен степени 1.

0.1 Пусть $a = 1, b = 0$. Существует ли такое натуральное n, что:

a) $S(P(n))$ =2025;

b) $S(P(n))$ =2026.

0.2 Аналогично, $a = 1, b = 0$. Найдите все такие натуральные числа N, для которых существует натуральное число n: $S(P(n)) = N$.

0.3 Найдите все такие натуральные числа N, для которых существует натуральное число n: $S(P(n)) = N$ в случае, если $P(x) = ax + b$, где a, b – произвольные натуральные числа.

0.4 Для каждого натурального N найдите все n: $\mathrm{S}(P(n)) = N$, где $P(x) = ax + b$ – многочлен с произвольными натуральными коэффициентами.

1. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$ – многочлен степени 2.

1.1 Пусть $a = 1,\ b = c = 0$. Существует ли такое натуральное n, что:

a) $S(P(n))$ =2025;

b) $S(P(n))$ =2026.

1.2 Аналогично, $a = 1,\ b = c = 0$. Найдите все такие натуральные числа N, для которых существует натуральное число n: $S(P(n)) = N$.

1.3 Найдите все такие натуральные числа N, для которых существует натуральное число n: $S(P(n)) = N$, где $P(x) = ax^2 + bx + c$, коэффициенты a, b, c – произвольные натуральные числа.

1.4 Для каждого натурального N найдите все n: $\mathrm{S}(P(n)) = N$, где $P(x) = ax^2 + bx + c$ – многочлен с произвольными натуральными коэффициентами.

2. Решите пункты 1.1–1.4 в случае, если $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ – многочлен степени 3 с натуральными коэффициентами.

3. Решите пункты 1.1–1.4 в случае, если $P(x)$ – многочлен степени k с натуральными коэффициентами.

4. Пусть теперь $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Теперь аналогично определим для каждого целого z величину $S(P(z))$, с условием, что $\mathrm{S}(z) = -S(-z)$. Решите пункты 0–3, для данного условия.

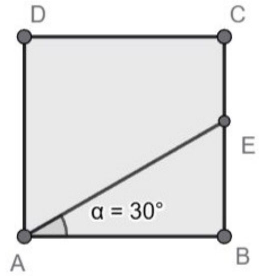
5. Теперь $P(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами. Теперь аналогично определим для каждого рационального q величину $S(P(q))$, причём $S(\frac{m}{n}) = \frac{S(m)}{S(n)}$, НОД$(m, n) = 1$. Решите пункты 0–3, для данного условия.

6. Решите пункты 0–5 в случае произвольной t-ичной системы исчисления.

7. Предложите свои обобщения и исследуйте их.

Задача 8. Длины отрезков в правильных многоугольниках

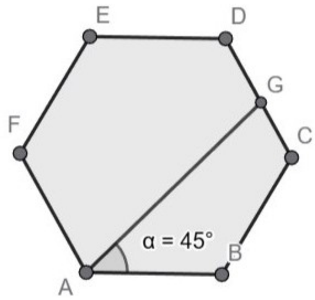
1. а) Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 1. На стороне DC отмечена точка E такая, что угол EAB равен 30°. Найдите CE.



б) Длина стороны правильного $2n$-угольника ($n \geq 4$) $A_1A_2\ldots A_{2n}$ равна 1. Из вершины A_1 выпущен луч, который образует со стороной A_1A_2 угол 30°. Этот луч пересекает сторону A_kA_{k+1} в точке B. Найдите BA_{k+1}.

в) Длина стороны правильного $(2n+1)$-угольника ($n \geq 2$) $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ равна 1. Из вершины A_1 выпущен луч, который образует со стороной A_1A_2 угол 30°. Этот луч пересекает сторону A_kA_{k+1} в точке B. Найдите BA_{k+1}.

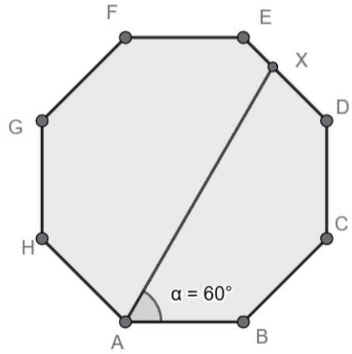
2. а) Длина стороны правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. На стороне DC отмечена точка G такая, что угол GAB равен 45°. Найдите DG.



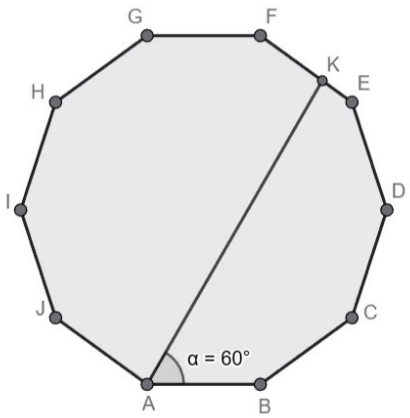
б) Длина стороны правильного $2n$-угольника ($n \geq 5$) $A_1A_2\ldots A_{2n}$ равна 1. Из вершины A_1 выпущен луч, который образует со стороной A_1A_2 угол 45°. Этот луч пересекает сторону A_kA_{k+1} в точке B. Найдите BA_{k+1}. Попробуйте найти решение этого пункта без использования теорем синусов и косинусов.

в) Длина стороны правильного $(2n+1)$-угольника ($n \geq 1$) $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ равна 1. Из вершины A_1 выпущен луч, который образует со стороной A_1A_2 угол 45°. Этот луч пересекает сторону A_kA_{k+1} в точке B. Найдите BA_{k+1}.

3. а) Длина стороны правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$ равна 1. На стороне DE отмечена точка X такая, что угол XAB равен 60°. Найдите XE.



б) Длина стороны правильного десятиугольника $ABCDEFGHIJ$ равна 1. На стороне EF отмечена точка K такая, что угол KAB равен 60°. Найдите KF.



4. а) Длина стороны правильного $2n$-угольника ($n \geq 6$) $A_1A_2\ldots A_{2n}$ равна 1. Из вершины A_1 выпущен луч, который образует со стороной A_1A_2 угол 60°. Этот луч пересекает сторону A_kA_{k+1} в точке B. Найдите BA_{k+1}. Попробуйте найти решение этого пункта без использования теорем синусов и косинусов.

б) Длина стороны правильного $(2n+1)$-угольника ($n \geq 1$) $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ равна 1. Из вершины A_1 выпущен луч, который образует со стороной A_1A_2 угол 60°. Этот луч пересекает сторону A_kA_{k+1} в точке B. Найдите BA_{k+1}.

5. Дан правильный m-угольник ($m > 3$) $A_1A_2\ldots A_m$. Из вершины A_1 выпущен луч, который образует со стороной A_1A_2 угол, равный биссектрисе угла правильного t-угольника ($t < m$). При каких t и m этот луч пересечет n-угольник в вершине?

6. Дан правильный $2n$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ длина стороны которого равна 1. Найдите угол между A_1A_4 и A_2A_{n+2}.

7. Дан правильный $2n$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ длина стороны которого равна 1, на стороне A_1A_2 взята точка X, которая делит сторону в отношении а) 1 / 1 ; б) p / q. Найдите угол между прямой XA_4 и A_2A_{n+2}.

8. Дан правильный $2n$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ длина стороны которого равна 1. На описанной окружности отметили середину дуги а) A_nA_{n+1} ; б) A_kA_{k+1}, где $k \in (2; 2n-2)$ – точку X. Найдите $\angle A_2A_1X$.

9. Предложите свои направления исследований в этой задаче и изучите их.

Задачи предложили: задачи №1, 4, 5 – Симоненко Д.Н., задача №2 – Довженок Т.С., задача №3 – Марковец Р.С., задача № 6 – Зинин Д.В., задача №7 – Андриалович М.А., задача №8 – Зеленевский А.В.